

Περιεχόμενα

Πρόλογος	xvii
0 Μαθηματικό Υπόβαθρο	1
0.1 Αριθμητικά Σύνολα και Ανισότητες	2
0.2 Επίπεδο Συντεταγμένων και Ευθεία Γραμμή	5
0.3 Διανύσματα στο Επίπεδο και τον Χώρο	8
0.4 Αλγεβρικοί Τύποι και Τεχνικές	11
0.5 Πολωνυμικές Εξισώσεις	14
0.6 Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων	20
0.7 Τριγωνομετρία	23
0.8 Μιγαδικοί Αριθμοί (Complex Numbers)	32
0.9 Εφαρμογές	53
0.10 Λυμένες Ασκήσεις	53
0.11 Ανακεφαλαίωση	60
0.12 Δραστηριότητες CAS & AI	62
0.13 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	63
0.14 Επαναληπτικές Ασκήσεις	64
Στοιχεία Γραμμικής Αλγεβρας	67
1 Γραμμικοί Διανυσματικοί Χώροι	71
1.1 Εισαγωγή	72
1.2 Ορισμός Γραμμικού Διανυσματικού Χώρου	73
1.3 Υποχώροι	76
1.4 Γραμμική Ανεξαρτησία (linear independence)	79
1.5 Βάση και Διάσταση	84
1.6 Άθροισμα Υποχώρων και Διάσταση	88
1.7 Γραμμικές Απεικονίσεις	90
1.8 Άλγεβρα πάνω στο $\mathbb{R}$	92
1.9 Εσωτερικό Γινόμενο και Ορθογωνιότητα	94
1.10 Εφαρμογές	108
1.11 Λυμένες Ασκήσεις	109
1.12 Ανακεφαλαίωση	115
1.13 Δραστηριότητες CAS & AI	116
1.14 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	117
1.15 Επαναληπτικές Ασκήσεις	119

2	Άλγεβρα Πινάκων	123
2.1	Ορισμός και Βασικές Έννοιες	124
2.2	Πράξεις Πινάκων	126
2.3	Ορίζουσα	133
2.4	Αντίστροφος Πίνακας	137
2.5	Τάξη Πίνακα και Θεμελιώδεις Υποχώροι	143
2.6	Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα	147
2.7	Διαγωνιοποίηση Μητρών	156
2.8	Εκθετικός Πίνακας	159
2.9	Εφαρμογές	163
2.10	Λυμένες Ασκήσεις	170
2.11	Ανακεφαλαίωση	179
2.12	Δραστηριότητες CAS & AI	182
2.13	Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	183
2.14	Επαναληπτικές Ασκήσεις	185
3	Γραμμικά Συστήματα	189
3.1	Γραμμικά Συστήματα	190
3.2	Γεωμετρική Ερμηνεία Γραμμικών Συστημάτων	193
3.3	Κλιμακωτή Μορφή Πινάκων	196
3.4	Κανόνας Cramer	204
3.5	LU Παραγοντοποίηση	206
3.6	Εφαρμογές	210
3.7	Λυμένες Ασκήσεις	216
3.8	Ανακεφαλαίωση	223
3.9	Δραστηριότητες CAS & AI	225
3.10	Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	226
3.11	Επαναληπτικές Ασκήσεις	228
4	Γραμμικοί Μετασχηματισμοί	233
4.1	Ορισμός Γραμμικού Μετασχηματισμού	234
4.2	Μήτρα Γραμμικού Μετασχηματισμού	237
4.3	Σύνθεση Μετασχηματισμών	238
4.4	Γεωμετρική Ερμηνεία	239
4.5	Τετραγωνικές Μορφές και Γεωμετρία Μετασχηματισμών	241
4.6	Ισομορφισμός και Αλλαγή Βάσης	245
4.7	Εφαρμογές	247
4.8	Λυμένες Ασκήσεις	251
4.9	Ανακεφαλαίωση	256
4.10	Δραστηριότητες CAS & AI	257
4.11	Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	258
4.12	Επαναληπτικές Ασκήσεις	260
5	Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα	261

5.1 Ορισμός Ιδιοτιμής — Ιδιοδιανύσματος	262
5.2 Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο	264
5.3 Υπολογισμός Ιδιοδιανυσμάτων	265
5.4 Γεωμετρική Ερμηνεία	268
5.5 Γεωμετρική και Αλγεβρική Πολλαπλότητα	269
5.6 Εφαρμογές	272
5.7 Λυμένες Ασκήσεις	276
5.8 Ανακεφαλαίωση	281
5.9 Δραστηριότητες CAS & AI	282
5.10 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	283
5.11 Επαναληπτικές Ασκήσεις	285
6 Διαγωνιοποίηση Πινάκων	287
6.1 Ορισμός — Διαγωνιοποιήσιμοι Πίνακες	288
6.2 Υπολογισμός Διαγωνιοποίησης	290
6.3 Συμμετρικοί Πίνακες — Ορθογωνιοποίηση	292
6.4 Αποσύνθεση Ιδιαζουσών Τιμών (SVD)	294
6.5 Εφαρμογές	300
6.6 Λυμένες Ασκήσεις	305
6.7 Ανακεφαλαίωση	312
6.8 Δραστηριότητες CAS & AI	313
6.9 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	314
6.10 Επαναληπτικές Ασκήσεις	316
7 Εισαγωγή σε Δυναμικά Συστήματα (Προαιρετικό)	319
7.1 Διακριτά Γραμμικά Συστήματα	320
7.2 Ρόλος Ιδιοτιμών	320
7.3 Σταθερότητα	321
7.4 Αλυσίδες Markov	322
7.5 Φασικά Πορτρέτα Γραμμικών Συστημάτων	323
7.6 Εφαρμογές	329
7.7 Λυμένες Ασκήσεις	331
7.8 Ανακεφαλαίωση	337
7.9 Δραστηριότητες CAS & AI	338
7.10 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	339
7.11 Επαναληπτικές Ασκήσεις	341
Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός	343
8 Συναρτήσεις μιας Πραγματικής Μεταβλητής	347
8.1 Συναρτήσεις μιας Πραγματικής Μεταβλητής	348
8.2 Εφαρμογές	369
8.3 Λυμένες Ασκήσεις	373
8.4 Ανακεφαλαίωση	376
8.5 Δραστηριότητες CAS & AI	377

8.6	Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	378
8.7	Επαναληπτικές Ασκήσεις	380
9	Όρια και Συνέχεια Συνάρτησης	383
9.1	Όρια Συνάρτησης	384
9.2	Συνέχεια Συνάρτησης	394
9.3	Εφαρμογές	400
9.4	Λυμένες Ασκήσεις	403
9.5	Ανακεφαλαίωση	406
9.6	Δραστηριότητες CAS & AI	407
9.7	Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	408
9.8	Επαναληπτικές Ασκήσεις	410
10	Παράγωγος Συνάρτησης	413
10.1	Παράγωγος Συνάρτησης	414
10.2	Γεωμετρική Ερμηνεία Παραγώγου	415
10.3	Πεπλεγμένη Παραγωγή και Λογαριθμική Παραγωγή	425
10.4	Παράγωγος Παραμετρικής και Πολικής Καμπύλης	428
10.5	Εφαρμογές	433
10.6	Λυμένες Ασκήσεις	439
10.7	Ανακεφαλαίωση	447
10.8	Δραστηριότητες CAS & AI	448
10.9	Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	449
10.10	Επαναληπτικές Ασκήσεις	451
11	Μονοτονία, Ακρότατα και Καμπυλότητα	453
11.1	Θεωρήματα Παραγώγου και Μελέτη Συμπεριφοράς	454
11.2	Κυρτότητα, Κοιλότητα και Σημεία Καμπής	456
11.3	Γεωμετρική Ερμηνεία Θεωρήματος Μέσης Τιμής	458
11.4	Πολυώνυμο Taylor και Προσεγγίσεις	462
11.5	Εφαρμογές	465
11.6	Λυμένες Ασκήσεις	468
11.7	Ανακεφαλαίωση	472
11.8	Δραστηριότητες CAS & AI	473
11.9	Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	474
11.10	Επαναληπτικές Ασκήσεις	476
12	Εφαρμογές Παραγώγου και Μελέτη Συνάρτησης	479
12.1	Κανόνας L'Hôpital — Απροσδιόριστες Μορφές	480
12.2	Μέθοδος Newton για Προσέγγιση Ριζών	483
12.3	Ασύμπτωτες — Λεπτομερής Μελέτη	485
12.4	Πρόχειρη Γραφική Παράσταση	487
12.5	Αναλυτική Γραφική Παράσταση	491
12.6	Εφαρμογές	496

12.7	Λυμένες Ασκήσεις	504
12.8	Ανακεφαλαίωση	511
12.9	Δραστηριότητες CAS & AI	513
12.10	Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	514
12.11	Επαναληπτικές Ασκήσεις	516
13	Αόριστο Ολοκλήρωμα	521
13.1	Αόριστο Ολοκλήρωμα	522
13.2	Εφαρμογές	529
13.3	Λυμένες Ασκήσεις	531
13.4	Ανακεφαλαίωση	534
13.5	Δραστηριότητες CAS & AI	535
13.6	Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	536
13.7	Επαναληπτικές Ασκήσεις	538
14	Ορισμένο Ολοκλήρωμα	541
14.1	Ορισμένο Ολοκλήρωμα	542
14.2	Γεωμετρική Ερμηνεία Ορισμένου Ολοκληρώματος	545
14.3	Εφαρμογές	549
14.4	Λυμένες Ασκήσεις	552
14.5	Ανακεφαλαίωση	555
14.6	Δραστηριότητες CAS & AI	556
14.7	Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	557
14.8	Επαναληπτικές Ασκήσεις	559
15	Θεμελιώδες Θεώρημα Λογισμού	561
15.1	Θεμελιώδες Θεώρημα Λογισμού	562
15.2	Εφαρμογές	567
15.3	Λυμένες Ασκήσεις	569
15.4	Ανακεφαλαίωση	574
15.5	Δραστηριότητες CAS & AI	575
15.6	Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	576
15.7	Επαναληπτικές Ασκήσεις	578
16	Τεχνικές Ολοκλήρωσης	579
16.1	Μέθοδοι Ολοκλήρωσης	580
16.2	Εφαρμογές	591
16.3	Λυμένες Ασκήσεις	593
16.4	Ανακεφαλαίωση	597
16.5	Δραστηριότητες CAS & AI	598
16.6	Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	599
16.7	Επαναληπτικές Ασκήσεις	601
17	Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων	603
17.1	Αριθμητική Ολοκλήρωση	604

17.2	Εφαρμογές	607
17.3	Λυμένες Ασκήσεις	626
17.4	Ανακεφαλαίωση	630
17.5	Δραστηριότητες CAS & AI	631
17.6	Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	633
17.7	Επαναληπτικές Ασκήσεις	635
18	Γενικευμένα Ολοκληρώματα	637
18.1	Γενικευμένα Ολοκληρώματα	638
18.2	Εφαρμογές	644
18.3	Λυμένες Ασκήσεις	649
18.4	Ανακεφαλαίωση	653
18.5	Δραστηριότητες CAS & AI	654
18.6	Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	655
18.7	Επαναληπτικές Ασκήσεις	657
19	Ακολουθίες και Άπειρες Σειρές	661
19.1	Ακολουθίες Πραγματικών Αριθμών	662
19.2	Γεωμετρική Ερμηνεία Σύγκλισης Ακολουθίας	668
19.3	Άπειρες Σειρές	671
19.4	Κριτήρια Σύγκλισης	674
19.5	Σειρές Δυνάμεων και Αναπτύγματα Taylor	683
19.6	Γραμμικοποίηση και Προσεγγίσεις Taylor στη Μηχανική	689
19.7	Εφαρμογές	692
19.8	Λυμένες Ασκήσεις	697
19.9	Ανακεφαλαίωση	708
19.10	Δραστηριότητες CAS & AI	710
19.11	Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	711
19.12	Επαναληπτικές Ασκήσεις	714
A'	Οδηγός Maxima CAS	717
B'	Οδηγός Python για Μαθηματικούς Υπολογισμούς	719
	Ευρετήριο Ορολογίας	721

Κατάλογος σχημάτων

1	Η πραγματική αριθμητική ευθεία $\mathbb{R}$: θέση χαρακτηριστικών σημείων $-\pi/2, \sqrt{2}, \pi$	2
2	Απόσταση $d(P_1, P_2)$ και μέσο σημείο M δύο σημείων στο καρτεσιανό επίπεδο.	6
3	Γεωμετρική ερμηνεία κλίσης ευθείας: θετική κλίση ($m > 0$) και αρνητική κλίση ($m < 0$).	6
4	Παράλληλες ευθείες ($m_1 = m_2$, αριστερά) και κάθετες ευθείες ($m_1 \cdot m_2 = -1$, δεξιά): γεωμετρικές σχέσεις κλίσεων.	7
5	Πρόσθεση διανυσμάτων κατά τον νόμο παραλληλογράμμου (αριστερά) και βαθμωτός πολλαπλασιασμός $\lambda \vec{v}$ (δεξιά).	9
6	Γεωμετρική ερμηνεία της ταυτότητας $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	13
7	Τρεις περιπτώσεις παραβολής $y = ax^2 + bx + c$ ανάλογα με τη διακρίνουσα Δ : δύο ρίζες ($\Delta > 0$), διπλή ρίζα ($\Delta = 0$), καμία ρίζα ($\Delta < 0$).	17
8	Γεωμετρική ερμηνεία 2×2 γραμμικού συστήματος: μοναδική λύση (τομή ευθειών), καμία λύση (παράλληλες), άπειρες λύσεις (ταύτιση).	21
9	Ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$: ορισμός τριγωνομετρικών αριθμών ($\sin \omega, \cos \omega, \tan \omega$) για οξεία γωνία ω	23
10	Ορθογώνιο τρίγωνο OMA με $M = (4, 3)$: $ OM = 5, \sin \omega = 3/5, \cos \omega = 4/5, \tan \omega = 3/4$	24
11	Ο μοναδιαίος κύκλος με τους άξονες ημιτόνων, συνημιτόνων, εφαπτομένων ($x = 1$) και συνεφαπτομένων ($y = 1$). Για γωνία ω : $M(\cos \omega, \sin \omega), E(1, \tan \omega), \Sigma(\cot \omega, 1)$	25
12	Μοναδιαίος κύκλος: πρόσημα τριγωνομετρικών συναρτήσεων (+/-) ανά τεταρτημόριο.	26
13	Γεωμετρική ερμηνεία των αναγωγικών τύπων στον μοναδιαίο κύκλο. Μπλε: $M(\cos \omega, \sin \omega)$, πορτοκαλί: M' συγγενής γωνία.	28
14	Μιγαδικό επίπεδο Argand-Gauss: γεωμετρική αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών ως σημεία και διανύσματα.	38
15	Πρόσθεση μιγαδικών αριθμών κατά τον κανόνα παραλληλογράμμου.	39
16	Πρόσθεση μιγαδικών αριθμών ως διανυσματική πράξη: κανόνας παραλληλογράμμου.	40
17	Αφαίρεση μιγαδικών: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Το $-z_2$ (διακεκομμένο) αντιστοιχεί στο συμμετρικό του z_2 ως προς την αρχή.	40
18	Τριγωνομετρική (πολική) μορφή μιγαδικού αριθμού: $r =$ μέτρο, $\theta =$ όρισμα.	41
19	Μοναδιαίος κύκλος και τύπος Euler: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$	42
20	Γεωμετρία πολλαπλασιασμού μιγαδικών: $ z_1 z_2 = z_1 z_2 , \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$	43
21	Διάγραμμα Argand των κυβικών ριζών του $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$: τρεις ρίζες ισαπέχουν ανά $2\pi/3$ σε κύκλο ακτίνας $\sqrt[3]{2}$	46
22	Οι έξι ρίζες της μονάδας $z^6 = 1$: ισαπέχουν ανά 60° επί του μοναδιαίου κύκλου.	47
23	Τέσσερις ρίζες του $z^4 = -16$: ισαπέχουν ανά 90° σε κύκλο ακτίνας 2.	48
24	Φασορικό διάγραμμα EP κυκλώματος: σύνθεση Z_R, Z_L, Z_C στο μιγαδικό επίπεδο.	51
25	Αρμονική ταλάντωση $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ και ο αντίστοιχος φάσορας.	52
1.1	Γεωμετρικοί υποχώροι του $\mathbb{R}^3$: σημείο (0 διαστάσεις), ευθεία (1 διάσταση), επίπεδο (2 διαστάσεις) και ολόκληρος ο $\mathbb{R}^3$	78
1.2	Γεωμετρική ερμηνεία προβολής: $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$ είναι η συνιστώσα του $\mathbf{u}$ στη διεύθυνση $\mathbf{v}$, ενώ $\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$ είναι κάθετη στο $\mathbf{v}$	96

1.3	Το $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ (κανόνας δεξιάς χειρός), με μέτρο ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.	98
1.4	Αλγόριθμος Gram-Schmidt: αφαιρούμε από $\mathbf{v}_2$ την προβολή του πάνω στο $\mathbf{w}_1$, παράγοντας $\mathbf{w}_2 \perp \mathbf{w}_1$	104
1.5	Γεωμετρική ερμηνεία της ορθογωνίας προβολής $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$: το τμήμα παράλληλο στο $\mathbf{v}$	113
1.6	Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt: μετατροπή βάσης σε ορθοκανονική $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$	119
2.1	Γεωμετρική ερμηνεία ιδιοδιανύσματος	131
2.2	Γεωμετρική ερμηνεία της ορίζουσας: η $ \det A $ ισούται με τον λόγο εμβαδού εικόνας προς εμβαδό αρχικού παραλληλογράμμου.	132
2.3	Οι τέσσερις θεμελιώδεις υποχώροι ενός $m \times n$ πίνακα A τάξης r . Χώρος γραμμών και μηδενόχωρος είναι ορθογώνιοι στο $\mathbb{R}^n$, χώρος στηλών και αριστερός μηδενόχωρος ορθογώνιοι στο $\mathbb{R}^m$	146
2.4	Ιδιοδιανύσματα 2×2 πίνακα: γεωμετρική ερμηνεία ως κατευθύνσεις αναλλοίωτες κατά τον γραμμικό μετασχηματισμό.	174
2.5	Γραμμικός μετασχηματισμός ως κλιμάκωση κατά μήκος ιδιοδιανυσμάτων: επίδραση του πίνακα C στο $\mathbb{R}^2$	175
2.6	Σύγκλιση μεθόδου δύναμης (power iteration): σταδιακή προσέγγιση κυρίαρχου ιδιοδιανύσματος.	185
3.1	Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο: ταύτιση, παραλληλία και τομή.	194
3.2	Εφαρμογή νόμων Kirchhoff: κυκλωματικά ρεύματα σε επίπεδο ηλεκτρικό κύκλωμα.	213
3.3	Επίπεδο δικτύωμα τριών μελών: επίλυση γραμμικού συστήματος για τις αξονικές δυνάμεις.	215
3.4	Παραμετρική ευθεία στον $\mathbb{R}^3$: σχετική της θέση ως προς λύσεις γραμμικού συστήματος.	220
3.5	Γεωμετρική αναπαράσταση παραμετρικής ευθείας $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t \mathbf{d}$ στο επίπεδο.	221
4.1	Στροφή τετραγώνου κατά 45° . Μπλε: αρχική θέση, κόκκινη διακεκομμένη: περιστραμμένη θέση. Αποστάσεις από αρχή και σχετικές γωνίες διατηρούνται.	249
4.2	Κλιμάκωση και μετατόπιση τριγώνου. Μπλε: αρχικό, πράσινη διακεκομμένη: μετά κλιμάκωση, κόκκινη διακεκομμένη: μετά και τη μετατόπιση. Οι σχετικές γωνίες παραμένουν αμετάβλητες.	250
5.1	Θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή	272
5.2	Φάσμα σταθερής κατάστασης - φραγμένο σύστημα	275
5.3	Φάσμα ασυμπτωτικά σταθερού συστήματος	276
6.1	PCA: Κύριες συνιστώσες και διακύμανση δεδομένων	293
6.2	Εξέλιξη συστήματος: διαγώνια περίπτωση	302
7.1	Σύστημα δυο ορόφων με ελατήρια και αποσβεστήρες	329
8.1	Γράφημα συνάρτησης $y = f(x)$: η γεωμετρική εικόνα της αντιστοίχισης $x \mapsto f(x)$	350
8.2	Μονοτονία και αμφιμονοσήμαντη χαρακτήρας: $y = x^2$ δεν είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$, αλλά είναι 1-1 στο $[0, +\infty)$	352
8.3	Φραγμένη συνάρτηση: κάτω φράγμα $m = \inf f(D)$ και άνω φράγμα $M = \sup f(D)$	357
8.4	Ολικό ελάχιστο $f(x_0)$ και ολικό μέγιστο $f(x_1)$ συνάρτησης στο $[a, b]$	357
8.5	Συναρτήσεις δύναμης $y = x^k$: άρτιες δυνάμεις, περιττές δυνάμεις και αρνητικοί εκθέτες.	359
8.6	Εκθετικές συναρτήσεις $y = a^x$: αύξουσες για $a > 1$, φθίνουσες για $0 < a < 1$	361
8.7	Λογαριθμικές συναρτήσεις $y = \log_a x$ για διάφορες βάσεις a : αύξουσες για $a > 1$, φθίνουσες για $0 < a < 1$	363
8.8	Γραφικές παραστάσεις $y = \sin x$ και $y = \cos x$: περιοδικές με περίοδο 2π και πεδίο τιμών $[-1, 1]$	364

8.9	Γράφημα $y = \tan x$: κατακόρυφες ασύμπτωτες $x = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi$ και περίοδος $T = \pi$.	364
8.10	Γράφημα $y = \arctan x$: ορισμένο για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με οριζόντιες ασύμπτωτες $y = \pm \frac{\pi}{2}$.	365
8.11	Ομοιόμορφα φορτισμένη δοκός με απλές στηρίξεις. Η μπλε διακεκομμένη γραμμή δείχνει τη παραμορφωμένη μορφή.	369
8.12	Απόσβεση ημιτονοειδούς δόνησης. Οι κόκκινες διακεκομμένες γραμμές δείχνουν το περίβλημα (envelope) της ταλάντωσης.	371
8.13	Συνάρτηση θερμοκρασίας/αντίστασης θερμίστορα και η αντίστροφή της. Η σχέση είναι αμφιμονοσήμαντη, επιτρέποντας τη μέτρηση θερμοκρασίας από αντίσταση.	372
9.1	Ε-δ ορισμός ορίου: η ε-λωρίδα $ f(x) - L < \varepsilon$ αντιστοιχεί στη δ-γειτονιά $ x - x_0 < \delta$.	385
10.1	Παράγωγος ως όριο λόγου διαφορών: εφαπτόμενη ως όριο τεμνουσών στο $(1, f(1))$.	417
10.2	Γραμμικοποίηση: εφαπτόμενη ως τοπική προσέγγιση $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.	418
10.3	Καρδιοειδής $r = a(1 + \cos \theta)$ — εφαπτομένη στο $\theta = \pi/2$ (πορτοκαλί) και οριζόντια εφαπτομένη στο $\theta = \pi/3$ (κόκκινη διακεκομμένη).	432
10.4	Εφαρμογή παραγώγου: ρυθμός dh/dt ύψους νερού σε κωνική δεξαμενή κατά τη ροή.	433
11.1	Θεώρημα Μέσης Τιμής: $\exists c \in (a, b)$ με $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (εφαπτόμενη παράλληλη στη χορδή).	458
12.1	Πρόχειρη γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 3x + 2$: τοπικό μέγιστο $(-1, 4)$, τοπικό ελάχιστο $(1, 0)$, ρίζες $x = -2$ και $x = 1$ (διπλή).	488
12.2	Πρόχειρη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$: τοπικό μέγιστο $(0, 0)$, τοπικό ελάχιστο $(2, 4)$, κατακόρυφη ασύμπτωτη $x = 1$ και πλάγια $y = x + 1$.	490
12.3	Γράφημα της $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$: τοπικό ελάχιστο στο $(0, -1)$, σημεία καμπής, οριζόντια ασύμπτωτη $y = 1$.	493
12.4	Γράφημα της $g(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$: τοπικό μέγιστο $(-1, -\frac{1}{4})$, σημείο καμπής $(-2, -\frac{2}{9})$, κατακόρυφη ασύμπτωτη $x = 1$.	495
12.5	Ελαστική γραμμή δοκού υπό ομοιόμορφο φορτίο: $EI y^{(4)} = q$ και οριακές συνθήκες.	503
12.6	Γράφημα της $h(x) = xe^{-x}$: τοπικό μέγιστο $(1, e^{-1})$, σημείο καμπής $(2, 2e^{-2})$, ασύμπτωτη $y = 0$ για $x \rightarrow +\infty$.	509
12.7	Γράφημα του $p(x) = x^3 - 3x$: τοπικό μέγιστο $(-1, 2)$, τοπικό ελάχιστο $(1, -2)$, σημείο καμπής $(0, 0)$, ρίζες $0, \pm\sqrt{3}$.	510
13.1	Οικογένεια αρχεγόνων $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$ (αντιπαράγωγοι του $f(x) = x$): κατακόρυφες μεταθέσεις με παράλληλες εφαπτόμενες σε κάθε x .	523
13.2	Θέση $s(t) = t^3 - 3t^2 + 4t + 2$ με ελάχιστη ταχύτητα στο $t = 1$ s.	529
13.3	Φόρτιση πυκνωτή: $q(t) = RC \cdot i_0(1 - e^{-t/RC})$.	530
13.4	Ελαστική γραμμή δοκού με ομοιόμορφο φορτίο.	530
14.1	Γεωμετρική ερμηνεία αόριστου ολοκληρώματος: η οικογένεια αντιπαραγώγων $F(x) + C$.	544
14.2	Άνω και κάτω αθροίσματα Riemann: $L_n \leq \int_a^b f dx \leq U_n$, σύγκλιση για $n \rightarrow \infty$.	545
15.1	Εμβαδόν κάτω από $\sin x$ σε $[0, \pi]$: $E = 2$.	567
15.2	Συνάρτηση σφάλματος $F(x) = \operatorname{erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.	568
15.3	Ρυθμός παραμόρφωσης $\varepsilon'(t) = \sin(\pi t/T)$.	568
16.1	Δύναμη $F(x) = xe^{-x}$ και έργο (σκιασμένη περιοχή).	591
16.2	Εμβαδόν ημικύκλου ακτίνας $R = 1$.	592
16.3	Παροχή $Q(t) = \frac{A}{t(t+1)}$ σε αγωγό.	593

17.1	Εμβαδό επίπεδης περιοχής μεταξύ δύο καμπυλών: $E = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.	608
17.2	Μήκος τόξου: το τμήμα $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (f')^2} dx$ αθροίζεται κατά μήκος της καμπύλης από a ως b .	609
17.3	Στερεό περιστροφής: η καμπύλη $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 4]$, περιστρέφεται γύρω από τον άξονα x δημιουργώντας παραβολικό στερεό.	611
17.4	Αριστερά: καρδιοειδής με περίμετρο $L = 8a$. Δεξιά: σπείρα Αρχιμήδη.	617
17.5	Έργο αντλίας για άδειασμα δεξαμενής: $W = \int_0^H \rho g h \cdot A dh$.	621
17.6	Παραβολικό προφίλ ταχύτητας ροής Poiseuille σε κυκλικό αγωγό: $v(r) = v_0(1 - r^2/R^2)$.	625
19.1	Για $\varepsilon = 0.3$: από $N_0 = 4$ και μετά όλοι οι όροι ανήκουν στη ζώνη $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ — ο ε - N ορισμός σε εικόνα.	669
19.2	Μερικά αθροίσματα γεωμετρικής σειράς $(1/2)^n$: μονότονη σύγκλιση στο $S = 2$.	669
19.3	Διαδοχικές προσεγγίσεις Taylor για $\sin x$: $T_1 = x$ (κόκκινη), $T_3 = x - x^3/6$ (πορτοκαλί), $T_5 = x - x^3/6 + x^5/120$ (μπλε). Η «ζώνη μικρής γωνίας» (κίτρινο) δείχνει πού T_1 είναι επαρκής.	690
19.4	Αλυσοειδής (μπλε συνεχής) vs. παραβολική προσέγγιση (κόκκινη διακεκομμένη) για $a = 2$. Η απόκλιση γίνεται σημαντική για $ x > a$.	694