Περιεχόμενα

Πρόλογος **xix**

0 Μαθηματικό Υπόβαθρο **1**
0.1 Αριθμητικά Σύνολα και Ανισότητες . . . 2
0.2 Επίπεδο Συντεταγμένων και Ευθεία Γραμμή . . . 5
0.3 Διανύσματα στο Επίπεδο και τον Χώρο . . . 8
0.4 Αλγεβρικοί Τύποι και Τεχνικές . . . 11
0.5 Πολυωνυμικές Εξισώσεις . . . 13
0.6 Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων . . . 19
0.7 Τριγωνομετρία . . . 23
0.8 Μιγαδικοί Αριθμοί . . . 31
0.9 Εφαρμογές . . . 50
0.10 Λυμένες Ασκήσεις . . . 53
0.11 Ανακεφαλαίωση . . . 59
0.12 Δραστηριότητες CAS, Python & TN . . . 60
0.13 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης . . . 61
0.14 Ασκήσεις . . . 62

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας **65**

1 Γραμμικοί Διανυσματικοί Χώροι **67**
1.1 Εισαγωγή . . . 68
1.2 Ορισμός Γραμμικού Διανυσματικού Χώρου . . . 69
1.3 Υπόχωροι . . . 71
1.4 Γραμμική Ανεξαρτησία . . . 74
1.5 Βάση και Διάσταση . . . 78
1.6 Άθροισμα Υποχώρων και Διάσταση . . . 82
1.7 Άλγεβρα πάνω στο $\mathbb{R}$ . . . 83
1.8 Εσωτερικό Γινόμενο και Ορθογωνιότητα . . . 85
1.9 Εφαρμογές . . . 100
1.10 Λυμένες Ασκήσεις . . . 101
1.11 Ανακεφαλαίωση . . . 107
1.12 Δραστηριότητες CAS, Python & TN . . . 108
1.13 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης . . . 110
1.14 Ασκήσεις . . . 110

2 Άλγεβρα Πινάκων **113**
2.1 Ορισμός και Βασικές Έννοιες . . . 114
2.2 Πράξεις Πινάκων . . . 116

2.3 Ορίζουσα . . . 121
2.4 Αντίστροφος Πίνακας . . . 125
2.5 Βαθμός Πίνακα και Θεμελιώδεις Υπόχωροι . . . 130
2.6 Ορθογώνιοι και Συμμετρικοί Πίνακες . . . 134
2.7 Ιδιοτιμές – Πρώτη Γνωριμία . . . 135
2.8 Εφαρμογές . . . 137
2.9 Λυμένες Ασκήσεις . . . 138
2.10 Ανακεφαλαίωση . . . 141
2.11 Δραστηριότητες CAS, Python & TN . . . 143
2.12 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης . . . 144
2.13 Ασκήσεις . . . 145

3 Γραμμικά Συστήματα **147**
3.1 Γραμμικά Συστήματα . . . 148
3.2 Γεωμετρική Ερμηνεία Γραμμικών Συστημάτων . . . 151
3.3 Κλιμακωτή Μορφή Πινάκων . . . 152
3.4 Κανόνας Cramer . . . 161
3.5 *LU* Παραγοντοποίηση . . . 164
3.6 Εφαρμογές . . . 166
3.7 Λυμένες Ασκήσεις . . . 170
3.8 Ανακεφαλαίωση . . . 181
3.9 Δραστηριότητες CAS, Python & TN . . . 182
3.10 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης . . . 183
3.11 Ασκήσεις . . . 184

4 Γραμμικοί Μετασχηματισμοί **187**
4.1 Ορισμός Γραμμικού Μετασχηματισμού . . . 188
4.2 Πίνακας Γραμμικού Μετασχηματισμού . . . 191
4.3 Σύνθεση Μετασχηματισμών . . . 192
4.4 Γεωμετρική Ερμηνεία . . . 193
4.5 Ισομορφισμός και Αλλαγή Βάσης . . . 194
4.6 Εφαρμογές . . . 196
4.7 Λυμένες Ασκήσεις . . . 200
4.8 Ανακεφαλαίωση . . . 205
4.9 Δραστηριότητες CAS, Python & TN . . . 206
4.10 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης . . . 207
4.11 Ασκήσεις . . . 208

5 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα **211**
5.1 Ορισμός Ιδιοτιμής – Ιδιοδιανύσματος . . . 212
5.2 Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο . . . 214
5.3 Υπολογισμός Ιδιοδιανυσμάτων . . . 217
5.4 Γεωμετρική Ερμηνεία . . . 220
5.5 Γεωμετρική και Αλγεβρική Πολλαπλότητα . . . 221
5.6 Συμμετρικοί Πίνακες και Εφαρμογές . . . 222
5.7 Λυμένες Ασκήσεις . . . 224
5.8 Ανακεφαλαίωση . . . 228
5.9 Δραστηριότητες CAS, Python & TN . . . 229

5.10 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 230
5.11 Ασκήσεις 231

6 Διαγωνιοποίηση Πινάκων 233
6.1 Ορισμός – Διαγωνιοποιήσιμοι Πίνακες 234
6.2 Υπολογισμός Διαγωνιοποίησης 236
6.3 Συμμετρικοί Πίνακες – Ορθογωνιοποίηση 238
6.4 Τετραγωνικές Μορφές 241
6.5 Διάσπαση Ιδιαζουσών Τιμών (SVD) 245
6.6 Εφαρμογές 249
6.7 Λυμένες Ασκήσεις 255
6.8 Ανακεφαλαίωση 264
6.9 Δραστηριότητες CAS, Python & TN 265
6.10 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 267
6.11 Ασκήσεις 268

7 Εισαγωγή σε Δυναμικά Συστήματα 271
7.1 Διακριτά Γραμμικά Συστήματα 272
7.2 Ρόλος Ιδιοτιμών 273
7.3 Ευστάθεια Γραμμικού Συστήματος 274
7.4 Αλυσίδες Markov 275
7.5 Φασικά Πορτρέτα Γραμμικών Συστημάτων 277
7.6 Εφαρμογές 282
7.7 Λυμένες Ασκήσεις 284
7.8 Ανακεφαλαίωση 291
7.9 Δραστηριότητες CAS, Python & TN 291
7.10 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 292
7.11 Ασκήσεις 293

Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός 295

8 Συναρτήσεις μιας Πραγματικής Μεταβλητής 297
8.1 Συναρτήσεις μιας Πραγματικής Μεταβλητής 298
8.2 Παραμετρικές και Πολικές Καμπύλες 319
8.3 Εφαρμογές 320
8.4 Λυμένες Ασκήσεις 324
8.5 Ανακεφαλαίωση 327
8.6 Δραστηριότητες CAS, Python & TN 329
8.7 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 330
8.8 Ασκήσεις 331

9 Όρια και Συνέχεια Συνάρτησης 333
9.1 Όρια Συνάρτησης 334
9.2 Συνέχεια Συνάρτησης 346
9.3 Εφαρμογές 350
9.4 Λυμένες Ασκήσεις 353
9.5 Ανακεφαλαίωση 357
9.6 Δραστηριότητες CAS, Python & TN 358

9.7 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 359
9.8 Ασκήσεις 360

10 Παράγωγος Συνάρτησης **363**
10.1 Παράγωγος Συνάρτησης 364
10.2 Γεωμετρική Ερμηνεία Παραγώγου 365
10.3 Πεπλεγμένη Παραγώγιση και Λογαριθμική Παραγώγιση 375
10.4 Παράγωγος Παραμετρικής και Πολικής Καμπύλης 377
10.5 Θεωρήματα Μέσης Τιμής 381
10.6 Σχετικοί Ρυθμοί Μεταβολής 382
10.7 Εφαρμογές 384
10.8 Λυμένες Ασκήσεις 387
10.9 Ανακεφαλαίωση 393
10.10 Δραστηριότητες CAS, Python & TN 394
10.11 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 395
10.12 Ασκήσεις 396

11 Μονοτονία, Ακρότατα και Κυρτότητα **399**
11.1 Θεωρήματα Παραγώγου και Μελέτη Συμπεριφοράς Συναρτήσεων 400
11.2 Μονοτονία, Ακρότατα και Μελέτη Συνάρτησης 403
11.3 Κυρτότητα, Κοιλότητα και Σημεία Καμπής 405
11.4 Πολυώνυμο Taylor και Προσεγγίσεις 408
11.5 Εφαρμογές 412
11.6 Λυμένες Ασκήσεις 415
11.7 Ανακεφαλαίωση 420
11.8 Δραστηριότητες CAS, Python & TN 421
11.9 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 422
11.10 Ασκήσεις 422

12 Εφαρμογές Παραγώγου και Μελέτη Συνάρτησης **425**
12.1 Κανόνας L'Hôpital – Απροσδιόριστες Μορφές 426
12.2 Εφαπτομένη και Κάθετη Ευθεία 429
12.3 Μέθοδος Newton για Προσέγγιση Ριζών 430
12.4 Ασύμπτωτες Ευθείες – Λεπτομερής Μελέτη 435
12.5 Πρόχειρη Γραφική Παράσταση 437
12.6 Αναλυτική Γραφική Παράσταση 442
12.7 Εφαρμογές 446
12.8 Λυμένες Ασκήσεις 450
12.9 Ανακεφαλαίωση 458
12.10 Δραστηριότητες CAS, Python & TN 459
12.11 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 461
12.12 Ασκήσεις 462

13 Αόριστο Ολοκλήρωμα **465**
13.1 Αόριστο Ολοκλήρωμα 466
13.2 Εφαρμογές 474
13.3 Λυμένες Ασκήσεις 478
13.4 Ανακεφαλαίωση 480
13.5 Δραστηριότητες CAS, Python & TN 481

13.6 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 483
13.7 Ασκήσεις 483

14 Ορισμένο Ολοκλήρωμα **485**
14.1 Ορισμένο Ολοκλήρωμα 486
14.2 Γεωμετρική Ερμηνεία Ορισμένου Ολοκληρώματος 490
14.3 Ιδιότητες του Ορισμένου Ολοκληρώματος 491
14.4 Εφαρμογές 495
14.5 Λυμένες Ασκήσεις 498
14.6 Ανακεφαλαίωση 500
14.7 Δραστηριότητες CAS, Python & TN 500
14.8 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 502
14.9 Ασκήσεις 503

15 Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού **505**
15.1 Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού 506
15.2 Υπολογισμός Ορισμένων Ολοκληρωμάτων – Τύπος Newton–Leibniz 508
15.3 Αντικατάσταση σε Ορισμένο Ολοκλήρωμα 510
15.4 Ολοκλήρωση κατά Παράγοντες σε Ορισμένο Ολοκλήρωμα 511
15.5 Κανόνας Leibniz – Μεταβλητά Άκρα Ολοκλήρωσης 512
15.6 Εμβαδόν μεταξύ Καμπυλών 513
15.7 Εφαρμογές 515
15.8 Λυμένες Ασκήσεις 517
15.9 Ανακεφαλαίωση 523
15.10 Δραστηριότητες CAS, Python & TN 524
15.11 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 525
15.12 Ασκήσεις 526

16 Τεχνικές Ολοκλήρωσης **529**
16.1 Τεχνικές Ολοκλήρωσης 530
16.2 Εφαρμογές 546
16.3 Λυμένες Ασκήσεις 549
16.4 Ανακεφαλαίωση 553
16.5 Δραστηριότητες CAS, Python & TN 554
16.6 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 555
16.7 Ασκήσεις 557

17 Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων **559**
17.1 Αριθμητική Ολοκλήρωση 560
17.2 Εμβαδόν Επίπεδου Χωρίου 562
17.3 Όγκος Στερεού Περιστροφής 563
17.4 Μήκος Τόξου 565
17.5 Εμβαδόν Επιφάνειας εκ Περιστροφής 566
17.6 Μέση Τιμή Συνάρτησης 567
17.7 Εμβαδόν Χωρίου – Παραμετρικές και Πολικές Καμπύλες 568
17.8 Μήκος Τόξου σε Πολικές Συντεταγμένες 570
17.9 Όγκος Στερεού Περιστροφής – Μέθοδος Κελύφους 572
17.10 Κέντρο Μάζας και Ροπές 573
17.11 Έργο Μεταβλητής Δύναμης 577

17.12 Υδροστατική Πίεση σε Κατακόρυφο Τοίχωμα 579
17.13 Ροή Ρευστού σε Κυκλικό Αγωγό 581
17.14 Λυμένες Ασκήσεις 583
17.15 Ανακεφαλαίωση 586
17.16 Δραστηριότητες CAS, Python & TN 587
17.17 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 588
17.18 Ασκήσεις 589

18 Γενικευμένα Ολοκληρώματα **591**
18.1 Γενικευμένα Ολοκληρώματα 592
18.2 Εφαρμογές 600
18.3 Λυμένες Ασκήσεις 603
18.4 Ανακεφαλαίωση 609
18.5 Δραστηριότητες CAS, Python & TN 609
18.6 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 611
18.7 Ασκήσεις 611

19 Ακολουθίες και Άπειρες Σειρές **613**
19.1 Ακολουθίες Πραγματικών Αριθμών 614
19.2 Άπειρες Σειρές 622
19.3 Κριτήρια Σύγκλισης 626
19.4 Εφαρμογές 635
19.5 Λυμένες Ασκήσεις 638
19.6 Ανακεφαλαίωση 641
19.7 Δραστηριότητες CAS, Python & TN 642
19.8 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 644
19.9 Ασκήσεις 645

20 Δυναμοσειρές και Σειρές Taylor **647**
20.1 Σειρές Δυνάμεων και Αναπτύγματα Taylor 648
20.2 Γραμμικοποίηση και Προσεγγίσεις με Σειρές Taylor στη Μηχανική 655
20.3 Εφαρμογές 656
20.4 Λυμένες Ασκήσεις 662
20.5 Ανακεφαλαίωση 670
20.6 Δραστηριότητες CAS, Python & TN 671
20.7 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 672
20.8 Ασκήσεις 674

Παραρτήματα **677**

Α′ Οδηγός Maxima CAS **677**

Β′ Οδηγός Python για Μαθηματικούς Υπολογισμούς **679**

Βιβλιογραφία **681**

Ευρετήριο Ορολογίας **685**

Κατάλογος σχημάτων

0.1 Η πραγματική αριθμητική ευθεία $\mathbb{R}$: θέση χαρακτηριστικών σημείων $-\pi/2$, $\sqrt{2}$, π. 2
0.2 Απόσταση $d(P_1, P_2)$ και μέσο σημείο M δύο σημείων στο καρτεσιανό επίπεδο. 5
0.3 Γεωμετρική ερμηνεία κλίσης ευθείας: θετική κλίση ($m > 0$) και αρνητική κλίση ($m < 0$). . . . 6
0.4 Παράλληλες ευθείες ($m_1 = m_2$, αριστερά) και κάθετες ευθείες ($m_1 \cdot m_2 = -1$, δεξιά): γεωμετρικές σχέσεις κλίσεων. 6
0.5 Πρόσθεση διανυσμάτων κατά τον νόμο παραλληλογράμμου (αριστερά) και βαθμωτός πολλαπλασιασμός $\lambda\vec{v}$ (δεξιά). 9
0.6 Γεωμετρική ερμηνεία της ταυτότητας $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. 12
0.7 Τρεις περιπτώσεις παραβολής $y = ax^2 + bx + c$ ανάλογα με τη διακρίνουσα Δ: δύο ρίζες ($\Delta > 0$), διπλή ρίζα ($\Delta = 0$), καμία πραγματική ρίζα ($\Delta < 0$). 16
0.8 Γεωμετρική ερμηνεία ενός 2×2 γραμμικού συστήματος: μοναδική λύση (τομή ευθειών), καμία λύση (παράλληλες ευθείες), άπειρες λύσεις (ταύτιση). 20
0.9 Ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$: ορισμός τριγωνομετρικών αριθμών ($\sin\omega$, $\cos\omega$, $\tan\omega$) για οξεία γωνία ω. 23
0.10 Ορθογώνιο τρίγωνο OMA με $M = (4, 3)$: $|OM| = 5$, $\sin\omega = 3/5$, $\cos\omega = 4/5$, $\tan\omega = 3/4$. 24
0.11 Ο μοναδιαίος κύκλος με τους άξονες ημιτόνων, συνημιτόνων, εφαπτομένων ($x = 1$) και συνεφαπτομένων ($y = 1$). Για γωνία ω: $M(\cos\omega, \sin\omega)$, $E(1, \tan\omega)$, $\Sigma(\cot\omega, 1)$. 25
0.12 Μοναδιαίος κύκλος: πρόσημα τριγωνομετρικών συναρτήσεων $(+/-)$ ανά τεταρτημόριο. 26
0.13 Γεωμετρική ερμηνεία των αναγωγικών τύπων στον μοναδιαίο κύκλο. Μπλε: $M(\cos\omega, \sin\omega)$, πορτοκαλί: M' συγγενής γωνία. 28
0.14 Μιγαδικό επίπεδο Argand-Gauss: γεωμετρική αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών ως σημεία και διανύσματα. 36
0.15 Πρόσθεση μιγαδικών αριθμών κατά τον κανόνα παραλληλογράμμου. 37
0.16 Πρόσθεση μιγαδικών αριθμών ως διανυσματική πράξη: κανόνας παραλληλογράμμου. 37
0.17 Αφαίρεση μιγαδικών: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Το $-z_2$ (διακεκομμένο) αντιστοιχεί στο συμμετρικό του z_2 ως προς την αρχή. 38
0.18 Τριγωνομετρική (πολική) μορφή μιγαδικού αριθμού: r = μέτρο, θ = όρισμα. 38
0.19 Μοναδιαίος κύκλος και τύπος Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. 39
0.20 Γεωμετρία πολλαπλασιασμού μιγαδικών: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$. 40
0.21 Διάγραμμα Argand των κυβικών ριζών του $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$: τρεις ρίζες ισαπέχουν ανά $2\pi/3$ σε κύκλο ακτίνας $\sqrt[3]{2}$. 43
0.22 Οι έξι ρίζες της μονάδας $z^6 = 1$: ισαπέχουσες ανά $60°$ επί του μοναδιαίου κύκλου. 44
0.23 Τέσσερις ρίζες του $z^4 = -16$: ισαπέχουν ανά $90°$ σε κύκλο ακτίνας 2. 45
0.24 Τρίγωνο σύνθετης αντίστασης σειριακού κυκλώματος RLC: η ωμική αντίσταση R στον πραγματικό άξονα, η συνολική αντίδραση $X = X_L + X_C$ στον φανταστικό. Δεξιά φαίνεται πώς προκύπτει το X ως άθροισμα του επαγωγικού ($+j2{,}5$) και του χωρητικού ($-j1$) όρου. 48
0.25 Σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας συχνότητας: (α) οι φάσορες $\tilde{x}_1 = 3$ και $\tilde{x}_2 = 4j$ προστίθενται σαν διανύσματα και δίνουν $\tilde{x} = 3+4j$ (πλάτος 5, φάση $\approx 53{,}1°$)· (β) οι αντίστοιχες χρονικές κυματομορφές. 50
0.26 Ισορροπία κόμβου δικτυώματος: το φορτίο W και οι αξονικές δυνάμεις F_1, F_2 αναλύονται σε συνιστώσες και δίνουν ένα γραμμικό σύστημα 2×2. 51
0.27 Η εφικτή περιοχή του προγράμματος παραγωγής ως τομή ημιεπιπέδων. Το μέγιστο κέρδος επιτυγχάνεται στην κορυφή $(36, 28)$, δηλαδή στην τομή των δύο περιορισμών. 52

1.1 Μη τετριμμένοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$: ευθεία L (πορτοκαλί) και επίπεδο P (μπλε), αμφότερα διερχόμενα από την αρχή O. 73

1.2 Γεωμετρική ερμηνεία προβολής: $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ είναι η συνιστώσα του $\mathbf{u}$ στη διεύθυνση $\mathbf{v}$, ενώ $\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ είναι κάθετη στο $\mathbf{v}$. 89
1.3 Το $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ (κανόνας του δεξιού χεριού), με μέτρο ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου. 90
1.4 Αλγόριθμος Gram–Schmidt: αφαιρούμε από $\mathbf{v}_2$ την προβολή του πάνω στο $\mathbf{w}_1$, παράγοντας $\mathbf{w}_2 \perp \mathbf{w}_1$. 97
1.5 Γεωμετρική ερμηνεία της ορθογώνιας προβολής $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ όταν $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$: το τμήμα είναι παράλληλο στο $\mathbf{v}$ αλλά αντίρροπο. 105

2.1 Γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου $A\mathbf{v}$: στροφή του $\mathbf{v}$ κατά 90° 120
2.2 Γεωμετρική ερμηνεία της ορίζουσας: η $|\det A|$ ισούται με τον λόγο εμβαδού εικόνας προς εμβαδό αρχικού παραλληλογράμμου. 121
2.3 Οι τέσσερις θεμελιώδεις υπόχωροι ενός $m \times n$ πίνακα A βαθμού r. Χώρος γραμμών και μηδενόχωρος είναι ορθογώνιοι στον $\mathbb{R}^n$· χώρος στηλών και αριστερός μηδενόχωρος ορθογώνιοι στον $\mathbb{R}^m$. 133

3.1 Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο: ταύτιση, παραλληλία και τομή. 151
3.2 Εφαρμογή νόμων Kirchhoff: κυκλωματικά ρεύματα σε επίπεδο ηλεκτρικό κύκλωμα. 168
3.3 Επίπεδο δικτύωμα τριών μελών: επίλυση γραμμικού συστήματος για τις αξονικές δυνάμεις. . . . 169
3.4 Οι τρεις περιπτώσεις γραμμικού συστήματος 2×2: (α) μοναδική λύση (τεμνόμενες ευθείες), (β) καμία λύση (παράλληλες), (γ) άπειρες λύσεις (ταυτιζόμενες). 171
3.5 Παραμετρική ευθεία στον $\mathbb{R}^3$: σχετική της θέση ως προς λύσεις γραμμικού συστήματος. 174

4.1 Στροφή τετραγώνου κατά 45°. Μπλε: αρχική θέση, κόκκινη διακεκομμένη: περιστραμμένη θέση. Αποστάσεις από αρχή και σχετικές γωνίες διατηρούνται. 197
4.2 Κλιμάκωση και μετατόπιση τριγώνου. Μπλε: αρχικό, πράσινη διακεκομμένη: μετά κλιμάκωση, κόκκινη στικτή: μετά και τη μετατόπιση. Η ανομοιόμορφη κλιμάκωση ($s_x \neq s_y$) μεταβάλλει τις γωνίες, διατηρεί όμως την παραλληλία των πλευρών. 198

5.1 Ιδιοδιανύσματα 2×2 πίνακα: γεωμετρική ερμηνεία ως κατευθύνσεις αναλλοίωτες κατά τον γραμμικό μετασχηματισμό. 220
5.2 Γραμμικός μετασχηματισμός ως κλιμάκωση κατά μήκος ιδιοδιανυσμάτων: επίδραση του πίνακα C στον $\mathbb{R}^2$. 220
5.3 Οι δύο ιδιομορφές του συστήματος δύο μαζών – τριών ελατηρίων. Στην πρώτη ($\omega_1 = \sqrt{k/m}$) οι μάζες κινούνται σε φάση και το μεσαίο ελατήριο δεν παραμορφώνεται· στη δεύτερη ($\omega_2 = \sqrt{3k/m}$) κινούνται σε αντίθεση φάσης. Οι δύο ιδιομορφές είναι ορθογώνιες: $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. 223

6.1 PCA με $C = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$: επειδή $\lambda_1 = 0$, τα δεδομένα είναι *συνευθειακά* κατά τη διεύθυνση της PC1 $= [2, 1]^T$. Η PC2 δεν συγκεντρώνει καμία διακύμανση, η μία διάσταση αρκεί. 240
6.2 Στάθμες $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = c > 0$ του θετικά ορισμένου $A = \left[\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right]$: ελλείψεις με κύριους άξονες κατά τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_1 \parallel (1,-2)$ (λ_1=1) και $\mathbf{v}_2 \parallel (2,1)$ (λ_2=6), με ημιάξονες $\propto 1/\sqrt{\lambda_i}$ (στροφή $\approx 26{,}6^\circ$). 245
6.3 Εξέλιξη συστήματος: διαγώνια περίπτωση 252

7.1 Τα τέσσερα βασικά φασικά πορτρέτα του $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ στο επίπεδο. Το πρόσημο του *πραγματικού μέρους* των ιδιοτιμών κρίνει τη σύγκλιση ή την απόκλιση· το *φανταστικό* μέρος προσθέτει περιστροφή. Στο σάγμα, οι διακεκομμένες ευθείες είναι οι ιδιοκατευθύνσεις: η μία ελκτική, η άλλη απωθητική. 279
7.2 Σύστημα δύο ορόφων με ελατήρια και αποσβεστήρες 282

8.1 Γράφημα συνάρτησης $y = f(x)$: η γεωμετρική εικόνα της αντιστοίχισης $x \mapsto f(x)$. 299
8.2 Στο $[0, +\infty)$ η $y = x^2$ είναι 1–1: το γράφημά της και το γράφημα της αντίστροφης είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$ (στο $\mathbb{R}$ δεν είναι 1–1). 301
8.3 Φραγμένη συνάρτηση: κάτω φράγμα $m = \inf f(D)$ και άνω φράγμα $M = \sup f(D)$. 306
8.4 Ολικό ελάχιστο $f(x_{\min})$ και ολικό μέγιστο $f(x_{\max})$ μιας συνάρτησης. 306
8.5 Συναρτήσεις δύναμης $y = x^k$: άρτιες δυνάμεις, περιττές δυνάμεις και αρνητικοί εκθέτες. 307
8.6 Εκθετικές συναρτήσεις $y = a^x$: αύξουσες για $a > 1$, φθίνουσες για $0 < a < 1$. 310

8.7 Λογαριθμικές συναρτήσεις $y = \log_a x$ για διάφορες βάσεις a: αύξουσες για $a > 1$, φθίνουσες για $0 < a < 1$. 311
8.8 Γραφικές παραστάσεις $y = \sin x$ και $y = \cos x$: περιοδικές με περίοδο 2π και πεδίο τιμών $[-1, 1]$. 314
8.9 Γράφημα $y = \tan x$: κατακόρυφες ασύμπτωτες $x = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi$ και περίοδος $T = \pi$. 315
8.10 Γραφήματα των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\arcsin x$, $\arccos x$ και $\arctan x$· η $\arctan x$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με οριζόντιες ασύμπτωτες $y = \pm\frac{\pi}{2}$. 316
8.11 Μετασχηματισμοί της παραβολής $y = x^2$: μετατόπιση, ανάκλαση και κλιμάκωση. 318
8.12 Ομοιόμορφα φορτισμένη δοκός με απλές στηρίξεις. Η μπλε διακεκομμένη γραμμή δείχνει την παραμορφωμένη μορφή. 322
8.13 Απόσβεση ημιτονοειδούς δόνησης. Οι κόκκινες διακεκομμένες γραμμές δείχνουν το περίβλημα (envelope) της ταλάντωσης. 323
8.14 Συνάρτηση θερμοκρασίας/αντίστασης θερμίστορ και η αντίστροφή της. Η σχέση είναι 1–1, επιτρέποντας τη μέτρηση θερμοκρασίας από αντίσταση. 324

9.1 Ο ε-δ ορισμός του ορίου. *Δοσμένου* $\varepsilon > 0$ (γαλάζια οριζόντια λωρίδα γύρω από το L) *βρίσκουμε* $\delta > 0$ (πορτοκαλί κατακόρυφη λωρίδα γύρω από το x_0) ώστε όλο το γράφημα πάνω από τη *διάτρητη* γειτονιά $0 < |x - x_0| < \delta$ να βρίσκεται μέσα στο πράσινο ορθογώνιο. Η τιμή $f(x_0)$ (κόκκινη κουκκίδα) μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε – ή να μην ορίζεται καθόλου, όπως δείχνει η λευκή κουκκίδα – χωρίς να επηρεάζει το όριο. 335
9.2 Ασυνέχεια άλματος της f στο $x = 1$: το αριστερό όριο ισούται με 1, το δεξιό με 2 και η γραφική παράσταση παρουσιάζει άλμα ύψους 1. Η γεμάτη κουκκίδα αντιστοιχεί στην τιμή $f(1) = 2$, ενώ η κενή στο άκρο του κλάδου $y = x^2$, το οποίο δεν λαμβάνεται. 338
9.3 Εντοπισμός της ρίζας της $f(x) = x^3 - x - 5$ στο $(1, 2)$ με διαδοχική διχοτόμηση. 347
9.4 Διάγραμμα τάσης–παραμόρφωσης χάλυβα: γραμμική ελαστική περιοχή έως το σημείο διαρροής $(\varepsilon_y, \sigma_y)$ και πλαστική περιοχή μετά από αυτό. Η καμπύλη είναι συνεχής, αλλά με γωνία (μη παραγωγίσιμη) στο σημείο διαρροής. 350
9.5 Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής σε δοκό. Και τα δύο προφίλ (T_1 γραμμικό, T_2 μη γραμμικό) ξεκινούν στους 20°C και καταλήγουν στους 80°C· καθένα τους υποχρεωτικά τέμνει τη στάθμη $k = 50^\circ$C, αλλά σε διαφορετικό σημείο. Η ύπαρξη της λύσης εξασφαλίζεται από τη συνέχεια, όχι από τον τύπο. 351
9.6 Νόμος δύναμης $\dot{\varepsilon} = k\sigma^n$ με $n > 1$: καθώς $\sigma \to 0^+$ ο ρυθμός παραμόρφωσης τείνει στο μηδέν, το υλικό πρακτικά δεν παραμορφώνεται υπό πολύ μικρές τάσεις. 353

10.1 Εφαπτομένη $y = x - 1$ και κάθετη $y = -x + 1$ της $f(x) = x^3 - 2x + 1$ στο σημείο $(1, 0)$. . . 366
10.2 Παράγωγος ως όριο λόγου διαφορών: εφαπτομένη ως όριο τεμνουσών στο $(1,\ f(1))$. 367
10.3 Οι τρεις περιπτώσεις κλίσης της εφαπτομένης: $f'(x_0) > 0$ (θετική κλίση), $f'(x_0) = 0$ (κρίσιμο σημείο, εδώ τοπικό μέγιστο) και $f'(x_0) < 0$ (τοπικά φθίνουσα). 368
10.4 Καρδιοειδής $r = a(1+\cos\theta)$ – εφαπτομένη στο $\theta = \pi/2$ (πορτοκαλί) και οριζόντια εφαπτομένη στο $\theta = \pi/3$ (κόκκινη διακεκομμένη). 380
10.5 Εφαρμογή παραγώγου: ρυθμός dh/dt ύψους νερού σε κωνική δεξαμενή κατά τη ροή. 383

11.1 Θεώρημα Μέσης Τιμής: $\exists\, c \in (a, b)$ με $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (εφαπτομένη παράλληλη στη χορδή). . 402
11.2 Η γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ με τα σημεία που προκύπτουν από τη μελέτη: τοπικό μέγιστο $(0, 2)$, σημείο καμπής $(1, 0)$ και τοπικό ελάχιστο $(2, -2)$. Αριστερά του $x = 1$ η καμπύλη είναι κοίλη και δεξιά κυρτή. 407
11.3 Αριστερά: η βέλτιστη ορθογωνική διατομή για περίμετρο $P = 1{,}2$ m είναι τετράγωνο. Δεξιά: η συνάρτηση εμβαδού $A(b) = 0{,}6\,b - b^2$ με μέγιστο στο $b = 0{,}30$ m. 413
11.4 Κυλινδρική δεξαμενή χωρίς καπάκι και η συνάρτηση επιφάνειας $S(r) = \pi r^2 + 2/r$: το ελάχιστο εμφανίζεται στο $r \approx 0{,}683$ m, όπου $h = r$. 413
11.5 Ορθογωνική διατομή εγγεγραμμένη σε κυκλικό κορμό διαμέτρου D και η ροπή αδράνειας $I(h)$: μεγιστοποιείται για $h = 10\sqrt{3}$ cm, δηλαδή $h/b = \sqrt{3}$. 414

12.1 Πρόχειρη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$: κατακόρυφη ασύμπτωτη $x = 1$, οριζόντια $y = 2$, τομές $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ και $(0, -3)$. 439
12.2 Πρόχειρη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$: κατακόρυφη ασύμπτωτη $x = 1$, πλάγια $y = x + 1$, τομή με τους άξονες στην αρχή $(0, 0)$. 440

12.3 Πρόχειρη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x^2-25}{x^2-16}$: δύο κατακόρυφες ασύμπτωτες $x = \pm 4$, οριζόντια $y = 1$, τομές $(\pm 5, 0)$ και $\left(0, \frac{25}{16}\right)$. Η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον y-άξονα (άρτια συνάρτηση). 441

12.4 Γράφημα της $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$: τοπικό ελάχιστο στο $(0, -1)$, σημεία καμπής, οριζόντια ασύμπτωτη $y = 1$. 444

12.5 Γράφημα της $g(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$: τοπικό ελάχιστο $(-1, -\frac{1}{4})$, σημείο καμπής $(-2, -\frac{2}{9})$, κατακόρυφη ασύμπτωτη $x = 1$. 446

12.6 Γράφημα της $h(x) = xe^{-x}$: τοπικό μέγιστο $(1, e^{-1})$, σημείο καμπής $(2, 2e^{-2})$, ασύμπτωτη $y = 0$ για $x \to +\infty$. 457

12.7 Γράφημα του $p(x) = x^3 - 3x$: τοπικό μέγιστο $(-1, 2)$, τοπικό ελάχιστο $(1, -2)$, σημείο καμπής $(0, 0)$, ρίζες $0, \pm\sqrt{3}$. 458

13.1 Οικογένεια αντιπαραγώγων $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$ (αντιπαράγωγοι του $f(x) = x$): κατακόρυφες μεταθέσεις με παράλληλες εφαπτομένες σε κάθε x. 467

13.2 Θέση $s(t) = t^3 - 3t^2 + 4t + 2$ με ελάχιστη ταχύτητα στο $t = 1\,\text{s}$ 475

13.3 Φόρτιση πυκνωτή: $q(t) = RC \cdot i_0(1 - e^{-t/RC})$ 475

13.4 Αμφιέρειστη δοκός υπό ομοιόμορφο φορτίο q: άρθρωση στο A, κύλιση στο B, βύθιση $y(x)$ (διακεκομμένη). Στα άκρα $y = 0$, ενώ η στροφή είναι ελεύθερη. 476

14.1 Γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος: άθροισμα Riemann με $n = 5$ υποδιαστήματα – ορθογώνια πλάτους Δx_i και ύψους $f(x_i^*)$ (εδώ τα x_i^* είναι τα δεξιά άκρα, οπότε το σημείο βρίσκεται πάνω στην καμπύλη). 487

14.2 Αριστερό, μεσαίο και δεξί άθροισμα Riemann για την $f(x) = 0{,}4x^2 + 0{,}5$ στο $[0, 3]$ με $n = 4$· καθώς το n αυξάνεται και τα τρία συγκλίνουν στο $\int_0^3 f\,dx = 5{,}1$. 491

14.3 Ημερήσια διακύμανση της $T(t) = 15 + 10\sin(2\pi t/24)$ (μία πλήρης περίοδος, $0 \le t \le 24$ h) γύρω από τη μέση τιμή $\bar{T} = 15\,^\circ\text{C}$. Το χωρίο πάνω από τη μέση γραμμή ($0 < t < 12$, με $+$) και το χωρίο κάτω από αυτήν ($12 < t < 24$, με $-$) έχουν ίσα εμβαδά: γι' αυτό η ημιτονοειδής διακύμανση δεν συνεισφέρει στη μέση τιμή. 496

14.4 Άθροισμα Riemann δεξιών άκρων με $n = 6$ για την $f(x) = x^2$ στο $[0, 1]$ (σε κλίμακα): τα ορθογώνια υπερεκτιμούν το εμβαδόν, αφού η f είναι αύξουσα. 497

15.1 Το χωρίο ανάμεσα στην ευθεία $y = x$ και στην παραβολή $y = x^2$ στο $[0, 1]$. 514

15.2 Εμβαδόν κάτω από $\sin x$ σε $[0, \pi]$: $E = 2$ 516

15.3 Συνάρτηση σφάλματος $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 516

15.4 Ρυθμός παραμόρφωσης $\varepsilon'(t) = \dot{\varepsilon}_0 \sin(\pi t/T)$ (σχεδιασμένος για $\dot{\varepsilon}_0 = 1$) 517

16.1 Γεωμετρική ερμηνεία της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες: τα δύο χωρία συμπληρώνουν το ορθογώνιο $u \cdot v$. 531

16.2 Δύναμη $F(x) = xe^{-x}$ και έργο (σκιασμένη περιοχή) 547

16.3 Εμβαδόν ημικυκλίου ακτίνας $R = 1$ 548

16.4 Παροχή $Q(t) = \dfrac{A}{t(t+1)}$ σε αγωγό (για $A = 1$). Ο όγκος που διέρχεται από $t = 1$ έως $t = T$ είναι το σκιασμένο εμβαδόν. Καθώς $T \to \infty$ το εμβαδόν παραμένει *πεπερασμένο* και τείνει στο $A \ln 2 \approx 0{,}69A$. 548

17.1 Εμβαδόν επίπεδης περιοχής μεταξύ των καμπυλών $f(x) = 2x$ και $g(x) = x^2$ στο $[0, 2]$: $E = \int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx = \frac{4}{3}$. 563

17.2 Στερεό περιστροφής: η καμπύλη $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 4]$, περιστρέφεται γύρω από τον άξονα x δημιουργώντας παραβολικό στερεό. 564

17.3 Μήκος τόξου: το τμήμα $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (f')^2}\,dx$ αθροίζεται κατά μήκος της καμπύλης από a ως b. 566

17.4 Αριστερά: καρδιοειδής με περίμετρο $L = 8a$. Δεξιά: σπείρα Αρχιμήδη. 572

17.5 Άντληση νερού από κυλινδρική δεξαμενή. Η στρώση σε ύψος y έχει όγκο $\pi R^2\,\mathrm{d}y$ και πρέπει να ανυψωθεί κατά $H-y$: όσο πιο χαμηλά βρίσκεται, τόσο μεγαλύτερη η διαδρομή· γι' αυτό το έργο δίνεται από ολοκλήρωμα. 578
17.6 Παραβολικό προφίλ ταχύτητας (ροή Poiseuille) σε κυκλικό αγωγό. Η ταχύτητα μηδενίζεται στα τοιχώματα ($v(\pm R)=0$) και γίνεται μέγιστη στον άξονα ($v(0)=v_0$). Ο στοιχειώδης δακτύλιος πάχους $\mathrm{d}r$ έχει εμβαδόν $\mathrm{d}A = 2\pi r\,\mathrm{d}r$. 581

18.1 Το εμβαδόν κάτω από την $y=1/x^2$ από $x=1$ έως το άπειρο είναι πεπερασμένο και ίσο με $A=1$, παρότι το διάστημα ολοκλήρωσης είναι άπειρο. 600
18.2 Εκθετικά φθίνουσα πυκνότητα του αέρα με το ύψος. Η *μάζα* μιας στήλης διατομής $1\,\mathrm{m}^2$ είναι το σκιασμένο εμβαδόν: πεπερασμένο, παρότι η στήλη εκτείνεται στο άπειρο. Στο ύψος κλίμακας H η πυκνότητα έχει πέσει στο ρ_0/e. 601
18.3 Πυκνότητα εκθετικής κατανομής $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ για $\lambda=0{,}5$: η συνολική πιθανότητα (σκιασμένο εμβαδόν) ισούται με 1. 602
18.4 Η καμπύλη $1/\sqrt{x}$ συγκλίνει (γαλάζια περιοχή), ενώ η $1/x$ αποκλίνει (πορτοκαλί διακεκομμένη): ο ρυθμός μείωσης κοντά στην ιδιομορφία είναι κρίσιμος. 603

19.1 Ο ορισμός ε-N σε εικόνα: για $\varepsilon=0{,}3$, από $N_0=4$ και μετά όλοι οι όροι ανήκουν στη ζώνη $(1-\varepsilon,\,1+\varepsilon)$. 620
19.2 Μερικά αθροίσματα γεωμετρικής σειράς $(1/2)^n$: μονότονη σύγκλιση στο $S=2$. 621

20.1 Διαδοχικές προσεγγίσεις Taylor για $\sin x$: $T_1=x$ (κόκκινη), $T_3=x-x^3/6$ (πορτοκαλί), $T_5=x-x^3/6+x^5/120$ (μπλε). Η ζώνη μικρής γωνίας (κίτρινο) δείχνει το διάστημα στο οποίο η προσέγγιση T_1 είναι επαρκής. 656
20.2 Αλυσοειδής καμπύλη (μπλε) και παραβολική προσέγγιση (κόκκινη διακεκομμένη) για $a=2$. Κοντά στην κορυφή οι δύο καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται· γι' αυτό ο Γαλιλαίος θεώρησε ότι η αλυσίδα παίρνει σχήμα παραβολής. Η απόκλιση αυξάνεται για $|x|>a$, όπου αρχίζει να μετράει ο όρος $x^4/(24a^3)$. 659

Κατάλογος πινάκων

0.1 Τύποι διαστημάτων του $\mathbb{R}$: συμβολισμός, ορισμός και ονομασία . . . 4
0.2 Αντιστοιχία μοιρών και ακτινίων για τις βασικές γωνίες . . . 25
0.3 Τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων για τις βασικές γωνίες . . . 25
0.4 Πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών ανά τεταρτημόριο . . . 26
0.5 Αναγωγικοί τύποι: τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών ανηγμένοι σε οξεία γωνία ω . . . 28
0.6 Γενικές λύσεις των βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων . . . 30
0.7 Γεωμετρικοί τόποι στο μιγαδικό επίπεδο: μιγαδική συνθήκη και αντίστοιχη καμπύλη . . . 50

1.1 Μετρήσεις καθίζησης θεμελίου ανά μήνα – δεδομένα για προσαρμογή ευθείας με ελάχιστα τετράγωνα . . . 101

3.1 Γεωμετρική ερμηνεία των λύσεων γραμμικού συστήματος 2×2 και το αντίστοιχο κριτήριο βαθμού 152
3.2 Μετρήσεις κατακόρυφης μετατόπισης δοκού σε τρία σημεία, δεδομένα παρεμβολής . . . 166

4.1 Πίνακες των βασικών γεωμετρικών μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^2$: στροφή, ανακλάσεις, κλιμάκωση, προβολή . . . 193
4.2 Μετασχηματισμοί 2×2 στα γραφικά υπολογιστών: πίνακας και γεωμετρική δράση . . . 196

7.1 Ταξινόμηση των σημείων ισορροπίας γραμμικού συστήματος 2×2 ως προς τις ιδιοτιμές του A . 279

8.1 Σύγκριση ρυθμού αύξησης: πολυωνυμική x^2 έναντι εκθετικής 2^x . . . 309
8.2 Βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις: πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών, περίοδος και συμμετρία . . 314
8.3 Βασικές τιμές των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων arcsin, arccos, arctan . . . 316

9.1 Αριθμητική προσέγγιση του $\lim_{x\to 3} \frac{x-1}{x+2}$ από αριστερά και από δεξιά . . . 336

10.1 Πλήρης πίνακας παραγώγων των ειδικών συναρτήσεων . . . 371

14.1 Αθροίσματα Riemann για $f(x) = 0{,}4x^2 + 0{,}5$ στο $[0, 3]$: αριστερό, μεσαίο και δεξί για $n = 4$, $n = 10$ και $n \to \infty$ . . . 490

16.1 Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις ανά μορφή ριζικού: αντικατάσταση, περιορισμός γωνίας και ταυτότητα . . . 539

17.1 Τιμές και συντελεστές βαρύτητας για τον υπολογισμό του $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ με $n = 4$ (κανόνας τραπεζίου και Simpson) . . . 561

19.1 Επιλογή κριτηρίου σύγκλισης ανάλογα με τη μορφή του a_n. . . . 635

20.1 Μερικά αθροίσματα I_N της σειράς για το $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ και σφάλμα προσέγγισης . . . 661

Κατάλογος Θεωρημάτων

Θεώρημα 0.1 Θεώρημα Παράγοντα (Factor Theorem) . . . 13
Θεώρημα 0.2 Νόμος Ημιτόνων και Νόμος Συνημιτόνων . . . 28
Θεώρημα 0.3 Θεώρημα De Moivre . . . 40
Θεώρημα 0.4 Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας . . . 46
Θεώρημα 1.1 Θεώρημα Βάσης – Μοναδικότητα Πλήθους . . . 78
Θεώρημα 1.2 Κριτήρια Βάσης . . . 79
Θεώρημα 1.3 Τύπος του Grassmann . . . 82
Θεώρημα 1.4 Ευθύ Άθροισμα και Διάσταση . . . 83
Θεώρημα 1.5 Ανισότητα Cauchy–Schwarz . . . 86
Θεώρημα 1.6 Θεώρημα Ορθογώνιας Προβολής . . . 88
Θεώρημα 1.7 Αποστάσεις . . . 93
Θεώρημα 1.8 Αλγόριθμος Gram–Schmidt . . . 96
Θεώρημα 1.9 Παραγοντοποίηση QR . . . 98
Θεώρημα 2.1 Κριτήρια αντιστρεψιμότητας . . . 125
Θεώρημα 2.2 Θεώρημα Βαθμού–Μηδενικότητας για Πίνακες . . . 132
Θεώρημα 2.3 Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο . . . 135
Θεώρημα 3.1 Θεώρημα Rouché–Capelli (Kronecker–Capelli) . . . 149
Θεώρημα 3.2 Δομή Λύσεων Μη Ομογενούς Συστήματος . . . 159
Θεώρημα 3.3 Κανόνας Cramer . . . 161
Θεώρημα 4.1 Βασικές Ιδιότητες . . . 189
Θεώρημα 4.2 Θεώρημα Βαθμού–Μηδενικότητας . . . 190
Θεώρημα 4.3 Αναπαράσταση ως Πίνακας . . . 191
Θεώρημα 4.4 Ισομορφισμός και Διάσταση . . . 194
Θεώρημα 5.1 Ισοδύναμοι Χαρακτηρισμοί . . . 212
Θεώρημα 5.2 Ίχνος, Ορίζουσα και Ιδιοτιμές . . . 215
Θεώρημα 5.3 Συζυγή Ζεύγη . . . 219
Θεώρημα 5.4 Σχέση Πολλαπλοτήτων . . . 221
Θεώρημα 5.5 Γραμμική Ανεξαρτησία Ιδιοδιανυσμάτων . . . 222
Θεώρημα 5.6 Συμμετρικοί Πίνακες – Πραγματικές Ιδιοτιμές, Ορθογώνιες Ιδιοκατευθύνσεις . . . 222
Θεώρημα 6.1 Κριτήρια Διαγωνιοποιησιμότητας . . . 234
Θεώρημα 6.2 Φασματικό Θεώρημα . . . 239
Θεώρημα 6.3 Ταξινόμηση Τετραγωνικών Μορφών . . . 241
Θεώρημα 6.4 Κριτήριο Sylvester . . . 242
Θεώρημα 6.5 Χαρακτηρισμός μέσω Ιδιοτιμών . . . 243
Θεώρημα 6.6 Διάσπαση Ιδιαζουσών Τιμών . . . 245
Θεώρημα 6.7 Ιδιάζουσες Τιμές μέσω των Ιδιοτιμών του $A^T A$ . . . 246
Θεώρημα 6.8 Θεώρημα Eckart–Young – Προσέγγιση Χαμηλής Τάξης . . . 247
Θεώρημα 6.9 Υπολογισμός A^k . . . 249
Θεώρημα 6.10 Θεώρημα Cayley–Hamilton . . . 250
Θεώρημα 6.11 Ποσοστό Εξηγούμενης Διακύμανσης . . . 253
Θεώρημα 7.1 Κριτήριο Ευστάθειας . . . 274
Θεώρημα 7.2 Σύγκλιση Αλυσίδων Markov (Perron–Frobenius) . . . 276
Θεώρημα 7.3 Ταξινόμηση Σημείων Ισορροπίας ως προς τις Ιδιοτιμές . . . 279
Θεώρημα 7.4 Ελλιπής (Εκφυλισμένη) Ιδιοτιμή . . . 280
Θεώρημα 9.1 Κριτήριο Παρεμβολής . . . 341
Θεώρημα 9.2 Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής (ΘΕΤ) . . . 346
Θεώρημα 9.3 Θεώρημα Weierstrass – Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής . . . 348

Θεώρημα 10.1	Παραγωγισιμότητα $\Rightarrow$ Συνέχεια	368
Θεώρημα 10.2	Κανόνας Αλυσίδας	370
Θεώρημα 10.3	Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης	371
Θεώρημα 10.4	Θεώρημα Fermat	381
Θεώρημα 10.5	Θεώρημα Rolle	381
Θεώρημα 10.6	Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange)	381
Θεώρημα 11.1	Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής (Cauchy)	401
Θεώρημα 11.2	Κριτήριο 1ης Παραγώγου: Μονοτονία και Ακρότατα	403
Θεώρημα 11.3	Κριτήριο 2ης Παραγώγου για Ακρότατα	403
Θεώρημα 11.4	Πολυώνυμο Taylor	408
Θεώρημα 12.1	Κανόνας L'Hôpital	426
Θεώρημα 13.1	Οι Αντιπαράγωγοι Διαφέρουν κατά Σταθερά	466
Θεώρημα 14.1	Ολοκληρωσιμότητα Συνεχών Συναρτήσεων	488
Θεώρημα 14.2	Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού	494
Θεώρημα 15.1	Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού (ΘΘΟΛ)	506
Θεώρημα 15.2	Αντικατάσταση σε Ορισμένο Ολοκλήρωμα – Αλλαγή Ορίων	510
Θεώρημα 16.1	Ολοκλήρωση κατά Παράγοντες	530
Θεώρημα 16.2	Αντικατάσταση – Γενική Μορφή	534
Θεώρημα 16.3	Ολοκλήρωση με Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα	540
Θεώρημα 16.4	Επαναλαμβανόμενος Γραμμικός Παράγοντας	542
Θεώρημα 16.5	Ανάγωγος Τετραγωνικός Παράγοντας – Συμπλήρωση Τετραγώνου	544
Θεώρημα 17.1	Θεωρήματα Πάππου–Guldin	576
Θεώρημα 18.1	Κριτήριο p-Ολοκληρώματος (1ου και 2ου Είδους)	593
Θεώρημα 18.2	Κριτήριο Σύγκρισης για Γενικευμένα Ολοκληρώματα	596
Θεώρημα 18.3	Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης	597
Θεώρημα 19.1	Θεώρημα Bolzano-Weierstrass	616
Θεώρημα 19.2	Κριτήριο Cauchy για Ακολουθίες	617
Θεώρημα 19.3	Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης	617
Θεώρημα 19.4	Κριτήριο Σύγκρισης	626
Θεώρημα 19.5	Κριτήριο Σύγκρισης – Όριο	627
Θεώρημα 19.6	Κριτήριο Ολοκληρώματος	627
Θεώρημα 19.7	Κριτήριο Λόγου (d'Alembert)	629
Θεώρημα 19.8	Κριτήριο Ρίζας (Cauchy)	631
Θεώρημα 19.9	Κριτήριο Εναλλάσσουσας	633
Θεώρημα 19.10	Απόλυτη Σύγκλιση	633
Θεώρημα 20.1	Παραγώγιση και Ολοκλήρωση Σειρών Δυνάμεων	649
Θεώρημα 20.2	Σειρά Taylor και Maclaurin	650