

Γραμμικοί Διανυσματικοί Χώροι

✓ Στόχοι Μάθησης

- ▷ Να ορίζετε γραμμικό διανυσματικό χώρο και να επαληθεύετε τα αξιώματα.
- ▷ Να αναγνωρίζετε και να αποδεικνύετε αν ένα υποσύνολο είναι υπόχωρος.
- ▷ Να εργάζεστε με γραμμικούς συνδυασμούς, γραμμική ανεξαρτησία και βάση.
- ▷ Να υπολογίζετε τη διάσταση ενός γραμμικού χώρου.
- ▷ Να αλλάζετε βάση και να υπολογίζετε συντεταγμένες διανυσμάτων.
- ▷ Να εφαρμόζετε τις έννοιες αυτές σε χώρους πολυωνύμων και πινάκων.

≡ Περιεχόμενα Κεφαλαίου

1.1 Εισαγωγή	72
1.2 Ορισμός Γραμμικού Διανυσματικού Χώρου	73
1.3 Υποχώροι	76
1.4 Γραμμική Ανεξαρτησία (linear independence)	79
1.5 Βάση και Διάσταση	84
1.6 Άθροισμα Υποχώρων και Διάσταση	88
1.7 Γραμμικές Απεικονίσεις	90
1.8 Άλγεβρα πάνω στο $\mathbb{R}$	92
1.9 Εσωτερικό Γινόμενο και Ορθογωνιότητα	94
1.10 Εφαρμογές	108
1.11 Λυμένες Ασκήσεις	109
1.12 Ανακεφαλαίωση	115
1.13 Δραστηριότητες CAS & AI	116
1.14 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης	117
1.15 Επαναληπτικές Ασκήσεις	119

1.1 Εισαγωγή

Οι γραμμικοί διανυσματικοί χώροι αποτελούν μία από τις θεμελιώδεις έννοιες της σύγχρονης Άλγεβρας, με ευρύτατες εφαρμογές στα μαθηματικά, τη φυσική, τη μηχανική και την επιστήμη των υπολογιστών. Η ιδέα ενός διανυσματικού χώρου γενικεύει τις οικείες ιδιότητες των διανυσμάτων του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ και του χώρου $\mathbb{R}^3$ σε αφηρημένα σύνολα, όπου τα «διανύσματα» μπορεί να είναι πολυώνυμα, μιγαδικοί αριθμοί, πίνακες ή ακόμα και συναρτήσεις.

Η δύναμη της έννοιας έγκειται ακριβώς σε αυτή τη γενικότητα: οποτεδήποτε αποδειχθεί ότι ένα σύνολο αποτελεί γραμμικό χώρο, το σύνολο των αποτελεσμάτων που έχουν αναπτυχθεί για αφηρημένους διανυσματικούς χώρους εφαρμόζεται αυτόματα. Η θεωρία μάς δίνει έτσι ένα ενιαίο πλαίσιο για τη μελέτη φαινομενικά διαφορετικών δομών.

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζουμε αυστηρά την έννοια του γραμμικού διανυσματικού χώρου, εξετάζουμε τα κυριότερα παραδείγματα που συναντά ο μηχανικός, και αναπτύσσουμε τις βασικές έννοιες: υποχώρος, γραμμική ανεξαρτησία, βάση και διάσταση. Κλείνουμε με τη γενίκευση στην έννοια της *άλγεβρας* πάνω στο $\mathbb{R}$.

★ ΔΙ Ιστορικό Σημείωμα --- Hermann Grassmann (1809--1877)

Ο Γερμανός μαθηματικός **Hermann Grassmann** εισήγαγε το 1844, στο έργο *Die lineale Ausdehnungslehre*, μια πρωτοποριακή γενίκευση των διανυσμάτων σε αυθαίρετο αριθμό διαστάσεων — χωρίς κάποιο προφανή φυσικό πρότυπο, μέσα από αμιγώς αλγεβρική σκέψη. Αν και η ιδέα αγνοήθηκε για δεκαετίες, αναγνωρίστηκε ως θεμέλιο της σύγχρονης Γραμμικής Άλγεβρας. Ο όρος «*γραμμικός χώρος*» και η αξιωματική του διατύπωση εμπνεύστηκαν απευθείας από το έργο του Grassmann.

Για περισσότερα: [? ? ?]



Η εισαγωγική αυτή επισκόπηση ανέδειξε πόσο διαφορετικά μαθηματικά αντικείμενα --- διανύσματα, πολυώνυμα, πίνακες, συναρτήσεις --- μοιράζονται τις ίδιες αλγεβρικές ιδιότητες. Για να αξιοποιήσουμε αυτή τη δομική ομοιότητα, ορίζουμε αυστηρά την έννοια του *γραμμικού διανυσματικού χώρου* μέσα από ένα σύνολο αξιωμάτων.

► ANIMATION Πρόσθεση Διανυσμάτων — Κανόνας Παραλληλογράμμου

Σύρε τα διανύσματα **u** και **v** στο επίπεδο και δες το άθροισμα **u + v** να σχηματίζεται ως διαγώνιος του παραλληλογράμμου. **Παρατήρηση:** η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική — η ίδια διαγώνιος προκύπτει είτε ξεκινήσεις από το **u** είτε από το **v**. **Σύνδεση:** τα δύο αξιώματα κλειστότητας/πρόσθεσης του ορισμού του γραμμικού χώρου (Op. 1).



Εργαλειοθήκη — Πίνακες & Ορίζουσες (προεπισκόπηση)

Σε ορισμένα σημεία του κεφαλαίου χρησιμοποιούμε *πίνακες* και *ορίζουσες* ως υπολογιστικά εργαλεία — π.χ. για να ελέγξουμε γραμμική ανεξαρτησία ή να περιγράψουμε τον πυρήνα και την εικόνα μιας απεικόνισης. Εδώ συνοψίζουμε *μόνο* όσα θα χρειαστούμε: ο πλήρης και αυστηρός ορισμός, οι ιδιότητες και οι αποδείξεις δίνονται στο **Κεφάλαιο 2**.

Πίνακας. Ένας $m \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ είναι μια ορθογώνια διάταξη πραγματικών αριθμών με m γραμμές και n στήλες· για $m = n$ λέγεται **τετραγωνικός**.

Γινόμενο πίνακα–διανύσματος. Αν ο A είναι $m \times n$ με στήλες $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ και $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$, τότε

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m,$$

δηλαδή το $A\mathbf{x}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A — γεγονός που συνδέει άμεσα τους πίνακες με τους γραμμικούς χώρους.

Ορίζουσα. Υπενθυμίζουμε (Κεφ. 0) την ορίζουσα 2×2 , $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$. Για 3×3 αναπτύσσουμε ως προς την πρώτη γραμμή:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 \det \begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} - a_2 \det \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix} + a_3 \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Η ιδιότητα που θα αξιοποιήσουμε επανειλημμένα: η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα είναι $\neq 0$ αν και μόνο αν οι στήλες του (ισοδύναμα οι γραμμές του) είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Πλήρης μελέτη (ορίζουσες, τάξη, πράξεις, αντίστροφος): Κεφάλαιο 2.

1.2 Ορισμός Γραμμικού Διανυσματικού Χώρου

Αναμονή για την αφαίρεση: Τα τελευταία 150 χρόνια, τα μαθηματικά μάθαν ένα κρίσιμο μάθημα: όταν διαφορετικά αντικείμενα έχουν τις ίδιες δομικές ιδιότητες, ορίζουμε τη δομή ξεχωριστά και αποδεικνύουμε τα θεωρήματα μία φορά. Τα διανύσματα στο επίπεδο, τα πολυώνυμα, οι πίνακες, ακόμα και οι συναρτήσεις — αν και φυσικά διαφορετικά σε εμφάνιση — όλα μοιράζονται τις ίδιες λογικές δομές πρόσθεσης και κλιμάκωσης. Γιατί λοιπόν να αποδεικνύουμε κάθε θεώρημα ξεχωριστά για κάθε περίπτωση; Ο αφηρημένος ορισμός του γραμμικού χώρου απελευθερώνει όχι απλώς το θεωρητικό όργανο, αλλά και τη φαντασία του μαθηματικού: ένα θεώρημα που αποδεικνύεται για αφηρημένους χώρους ισχύει αυτόματα για όλα τα παραδείγματα χωρίς πρόσθετη εργασία.

Γιατί 8 αξιώματα; Διότι θέλουμε να αποτυπώσουμε αποκλειστικά τη δομή που είναι κοινή σε όλα τα παραδείγματα που μας ενδιαφέρουν — $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, πολυώνυμα, συναρτήσεις, πίνακες. Η αφαίρεση είναι σκόπιμη: δεν ορίζουμε «διάνυσμα» ως βέλος στο χώρο, αλλά ως στοιχείο ενός συνόλου που υπακούει σε αυτούς ακριβώς τους νόμους. Έτσι οποιοδήποτε αποτέλεσμα αποδείξουμε για αφηρημένους γραμμικούς χώρους θα ισχύει αυτόματα για κάθε συγκεκριμένο παράδειγμα. Τα οκτώ αξιώματα είναι το ελάχιστο που απαιτείται για να εξασφαλίσουμε ότι πρόσθεση και κλιμάκωση συμπεριφέρονται αναμενόμενα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 --- Γραμμικός Διανυσματικός Χώρος (vector space)

Έστω V ένα μη κενό σύνολο και $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Το V ονομάζεται **γραμμικός** (ή **διανυσματικός**) **χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$** αν έχουν ορισθεί σε αυτό δύο πράξεις:

- **Εσωτερική:** πρόσθεση $+: V \times V \rightarrow V$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$
- **Εξωτερική:** βαθμωτός πολλαπλασιασμός $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$, $(\lambda, \mathbf{u}) \mapsto \lambda \mathbf{u}$

που ικανοποιούν τα παρακάτω **οκτώ αξιώματα**, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

Αξιώματα πρόσθεσης:

- | | | |
|-------------------|---|-----------------------|
| (A ₁) | $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ | (Αντιμεταθετικότητα) |
| (A ₂) | $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ | (Προσεταιριστικότητα) |
| (A ₃) | $\exists \mathbf{0} \in V : \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ | (Μηδενικό στοιχείο) |
| (A ₄) | $\exists (-\mathbf{u}) \in V : \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ | (Αντίθετο στοιχείο) |

Αξιώματα βαθμωτού πολλαπλασιασμού:

- | | | |
|-------------------|--|---|
| (B ₁) | $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ | (Μοναδιαίο βαθμωτό) |
| (B ₂) | $(\lambda\mu)\mathbf{u} = \lambda(\mu\mathbf{u})$ | (Προσεταιριστικότητα) |
| (B ₃) | $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ | (Διανεμητικότητα ως προς V) |
| (B ₄) | $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$ | (Διανεμητικότητα ως προς $\mathbb{R}$) |

Τα στοιχεία του V ονομάζονται **διανύσματα** και τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ ονομάζονται **βαθμωτοί** ή **βαθμωτά**.

Είναι σκόπιμο να επισημανθεί μια σημαντική λεπτομέρεια σχετικά με τον παραπάνω ορισμό:

Σχόλιο 1.1

Αν αντί για το $\mathbb{R}$ χρησιμοποιήσουμε το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, ορίζουμε αναλόγως γραμμικό χώρο πάνω στο $\mathbb{C}$. Στο μάθημα αυτό εργαζόμαστε κυρίως πάνω στο $\mathbb{R}$, εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι διαφορετικό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1 (Επαλήθευση Αξιωμάτων σε $\mathbb{R}^2$ και $\mathcal{P}_2$)

Επαληθεύστε ότι ο $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικός χώρος ελέγχοντας και τα οκτώ αξιώματα, ότι ο $\mathcal{P}_2$ είναι γραμμικός χώρος, και δώστε ένα αντιπαράδειγμα συνόλου που δεν είναι.

ΛΥΣΗ: (α) $\mathbb{R}^2$ ως γραμμικός χώρος. Ορίζουμε $V = \mathbb{R}^2$ με τις κανονικές πράξεις:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Επειδή οι πράξεις γίνονται κατά συνιστώσα και ανάγονται στις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, ελέγχονται άμεσα και τα οκτώ αξιώματα (για $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$):

- (A₁) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ και (A₂) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (αντιμεταθετικότητα/προσεταιριστικότητα στο $\mathbb{R}$). ✓
- (A₃) μηδενικό $\mathbf{0} = (0, 0)$ και (A₄) αντίθετο $-(x, y) = (-x, -y)$. ✓

- $(B_1) 1 \cdot (x, y) = (x, y)$ και $(B_2) (\lambda \mu)(x, y) = \lambda(\mu(x, y))$. ✓
- $(B_3) \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$ και $(B_4) (\lambda + \mu)(x, y) = \lambda(x, y) + \mu(x, y)$. ✓

Άρα ο $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικός χώρος.

(β) $\mathcal{P}_2$ ως γραμμικός χώρος. Έστω $\mathcal{P}_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_i \in \mathbb{R}\}$ ο χώρος πολυωνύμων βαθμού ≤ 2 . Με $p + q =$ αθροισματικό πολυώνυμο και $\lambda \cdot p =$ πολλαπλασιαστικό, ελέγχουμε:

- Μηδενικό: $\mathbf{0} = 0$ (μηδενικό πολυώνυμο). ✓
- Αντίθετο: $-p = -a_0 - a_1x - a_2x^2$. ✓

Άρα $\mathcal{P}_2$ είναι γραμμικός χώρος — ίδια δομή με $\mathbb{R}^3$!

(γ) Αντιπαράδειγμα. Το $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ δεν είναι γραμμικός χώρος: $(1, 0) \in W$ αλλά $(-1) \cdot (1, 0) = (-1, 0) \notin W$. Παραβιάζεται η κλειστότητα ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό (η εξωτερική πράξη $\cdot : \mathbb{R} \times W \rightarrow W$ δεν είναι καλά ορισμένη).

1.2.1 Βασικές Ιδιότητες

Από τα αξιώματα προκύπτουν αμέσως μερικές χρήσιμες ιδιότητες:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1 --- Βασικές ιδιότητες γραμμικού χώρου

Σε κάθε γραμμικό χώρο V ισχύουν:

- (i) Το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$ είναι μοναδικό.
- (ii) Το αντίθετο $(-\mathbf{u})$ κάθε $\mathbf{u} \in V$ είναι μοναδικό.
- (iii) $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{u} \in V$.
- (iv) $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (v) $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$ για κάθε $\mathbf{u} \in V$.
- (vi) Αν $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{0}$, τότε $\lambda = 0$ ή $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σκανάρε για βήμα-βήμα απόδειξη με γεωμετρική διαίσθηση, τυπική τεκμηρίωση και μηχανική εφαρμογή. Στη σελίδα επιλέγεις Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο. Επαλήθευσε πάντα με βάση τη θεωρία.

Βλ. [? ? ? ?]



(Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2 (Εφαρμογή Βασικών Ιδιοτήτων)

(α) Αποδείξτε ότι $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{v} \in V$. (β) Υπολογίστε $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$ για $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (3, 0, 2)$.

ΛΥΣΗ: (α) Απόδειξη ότι $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Από τα αξιώματα: $0 \cdot \mathbf{v} = (0 + 0) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v}$. Αφαιρώντας $0 \cdot \mathbf{v}$ και από τις δύο πλευρές: $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}$. ✓

(β) Απλοποίηση έκφρασης. Δοθέντων $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (3, 0, 2)$ στον $\mathbb{R}^3$, υπολογίζουμε:

$$2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + 0 \cdot (5, 1, 7) = 2(1, 2, -1) - 3(3, 0, 2) + (0, 0, 0) = (2, 4, -2) - (9, 0, 6) = (-7, 4, -8).$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος $0 \cdot (5, 1, 7) = \mathbf{0}$ δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα (ιδ. (iii)).



Ο αξιωματικός ορισμός, παρόλο που φαίνεται αφηρημένος, έχει την ισχύ να αποδεικνύει με ένα βήμα ιδιότητες που ισχύουν για όλα τα γραμμικά αντικείμενα ταυτόχρονα. Ας δούμε τώρα πώς πλούσιος είναι ο κόσμος των δομών που τον ικανοποιούν.

Ασκήσεις

- Εξετάστε αν το σύνολο $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ με τις συνήθεις πράξεις αποτελεί γραμμικό χώρο. Αιτιολογήστε.
- Αποδείξτε ότι το μηδενικό στοιχείο σε έναν γραμμικό χώρο είναι μοναδικό.
- Αποδείξτε ότι για κάθε $\mathbf{v} \in V$: $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- Εξετάστε αν το $V = \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{v} \oplus \mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ και $\lambda \odot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ αποτελεί γραμμικό χώρο.
- Ποιο από τα παρακάτω σύνολα είναι γραμμικός χώρος; (α) $\{p \in \mathcal{P}_2 : p(0) = 1\}$, (β) $\{p \in \mathcal{P}_2 : p(0) = 0\}$.
- Αποδείξτε ότι $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ για κάθε $\mathbf{v}$ σε γραμμικό χώρο.
- (Ηλεκτρ./Ηλεκτρον.) Δείξτε ότι το σύνολο των ημιτονοειδών σημάτων σταθερής συχνότητας $\{A \sin(\omega t + \varphi) : A, \varphi \in \mathbb{R}\}$, με τις συνήθεις πράξεις, είναι γραμμικός χώρος, και εξηγήστε γιατί έχει διάσταση 2 (βάση $\{\cos \omega t, \sin \omega t\}$ — φασιθέτες).

1.3 Υποχώροι

Κλειστότητα και δομή: Ένας υποχώρος είναι ένα υποσύνολο ενός γραμμικού χώρου που «κλείνει» ως προς τις πράξεις του χώρου: αν πάρουμε δύο οποιαδήποτε στοιχεία του και τα προσθέσουμε ή τα πολλαπλασιάσουμε με βαθμωτό, το αποτέλεσμα παραμένει εντός. Η έννοια αυτή είναι κεντρική διότι οι υποχώροι εμφανίζονται παντού: ο χώρος λύσεων ενός ομογενούς συστήματος (δύναμη που εξαρτάται γραμμικά από την είσοδο), ο χώρος εικόνας ή πυρήνας μιας γραμμικής απεικόνισης, το επίπεδο ή η ευθεία μέσω της αρχής στο $\mathbb{R}^3$ — όλα αυτά είναι υποχώροι. Γεωμετρικά, κάθε υποχώρος του $\mathbb{R}^3$ είναι εξ ανάγκης ή το σημείο της αρχής, ή μια ευθεία δια της αρχής, ή ένα επίπεδο δια της αρχής, ή όλος ο $\mathbb{R}^3$. Αυτή η γεωμετρική εικόνα κάνει αμέσως σαφές γιατί πρέπει η αρχή να περιέχεται (το μηδενικό διάνυσμα είναι υποχρεωτικό): υποχώροι που *δεν* περνάνε δια της αρχής δεν είναι υποχώροι, ακόμα κι αν φαίνονται «συμμετρικά». Αρκεί να ελέγξουμε τρεις συνθήκες για να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο είναι υποχώρος του V αν αποτελεί γραμμικό χώρο ως προς τις ίδιες πράξεις.

Ο ακόλουθος χαρακτηρισμός καθιστά τον έλεγχο πιο πρακτικό:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2 --- Κριτήριο Υποχώρου

Ένα μη κενό $W \subseteq V$ είναι υποχώρος του V αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι παρακάτω τρεις συνθήκες:

(i) $\mathbf{0} \in W$

(ii) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$

(κλειστό ως προς πρόσθεση)

(iii) $\mathbf{u} \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \mathbf{u} \in W$

(κλειστό ως προς βαθμωτό πολλαπλασιασμό)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σκανάρε για βήμα-βήμα απόδειξη με γεωμετρική διαίσθηση, τυπική τεκμηρίωση και μηχανική εφαρμογή. Στη σελίδα επιλέγεις Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο. Επιλήθευσε πάντα με βάση τη θεωρία.

Βλ. [? ? ? ?]



(Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο)

Το παρακάτω παράδειγμα φωτίζει τη χρήση της ιδιότητας σε συγκεκριμένο πλαίσιο:

(Εδώ ο πίνακας A και το γινόμενο $A\mathbf{x}$ χρησιμοποιούνται ως εργαλεία: ο συμβολισμός συνοψίζεται στην Εργαλειοθήκη στην αρχή του κεφαλαίου — πλήρης μελέτη στο Κεφάλαιο 2.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3 (Πυρήνας και εικόνα γραμμικής απεικόνισης)

Ορίστε τον πυρήνα και την εικόνα ενός $m \times n$ πίνακα A και δείξτε ότι είναι υποχώροι.

ΛΥΣΗ: Αν $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, τότε:

$$\text{Ker}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^n$ (ο **πυρήνας** ή **μηδενόχωρος** του A), και

$$\text{Im}(A) = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$$

είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^m$ (η **εικόνα** ή **χώρος στηλών** του A), όπου $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ είναι οι στήλες του A .

Απόδειξη (κριτήριο υποχώρου). Για τον $\text{Ker}(A)$: ισχύει $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, άρα $\mathbf{0} \in \text{Ker}(A)$. Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{Ker}(A)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ και $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, οπότε $\mathbf{x} + \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} \in \text{Ker}(A)$. Για την $\text{Im}(A)$: $\mathbf{0} = A\mathbf{0} \in \text{Im}(A)$. αν $\mathbf{b}_1 = A\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{b}_2 = A\mathbf{x}_2$, τότε $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$ και $\lambda\mathbf{b}_1 = A(\lambda\mathbf{x}_1)$, άρα ανήκουν στην $\text{Im}(A)$. Επομένως και τα δύο σύνολα είναι υποχώροι. ■

1.3.1 Γεωμετρικοί Υποχώροι του $\mathbb{R}^3$

Στο $\mathbb{R}^3$ οι υποχώροι έχουν σαφή γεωμετρική εικόνα — και αυτό ακριβώς κάνει τη γεωμετρία εργαλείο κατανόησης της άλγεβρας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3 --- Γεωμετρικοί Υποχώροι του $\mathbb{R}^3$

Οι υποχώροι του $\mathbb{R}^3$ είναι ακριβώς:

- (i) $\{\mathbf{0}\}$ --- ο μηδενικός υποχώρος (τετριμμένος).
- (ii) Κάθε **ευθεία** που διέρχεται από την αρχή των αξόνων: $L = \{t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ για κάποιο $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.
- (iii) Κάθε **επίπεδο** που διέρχεται από την αρχή: $P = \{a\mathbf{u} + b\mathbf{v} : a, b \in \mathbb{R}\}$ για γ.α. $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.
- (iv) $\mathbb{R}^3$ --- ο ίδιος ο χώρος (τετριμμένος).

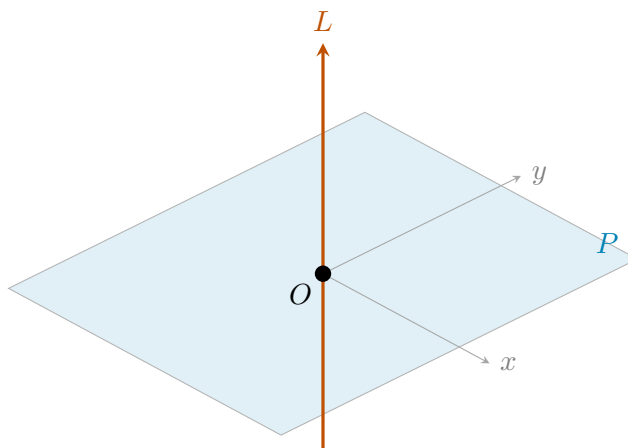
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σκανάρε για βήμα-βήμα απόδειξη με γεωμετρική διαίσθηση, τυπική τεκμηρίωση και μηχανική εφαρμογή. Στη σελίδα επιλέγεις Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο. Επαλήθευσε πάντα με βάση τη θεωρία.

Βλ. [? ? ? ?]



(Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο)



Σχήμα 1.3 Μη τετριμμένοι υποχώροι του $\mathbb{R}^3$: ευθεία L (πορτοκαλί) και επίπεδο P (μπλε), αμφότερα διερχόμενα από την αρχή O .

Σχήμα 1.1 Γεωμετρικοί υποχώροι του $\mathbb{R}^3$: σημείο (0 διαστάσεις), ευθεία (1 διάσταση), επίπεδο (2 διαστάσεις) και ολόκληρος ο $\mathbb{R}^3$.

Σχόλιο 1.2

Ευθείες και επίπεδα που δεν διέρχονται από την αρχή των αξόνων **δεν** είναι υποχώροι: το κριτήριο (i) απαιτεί $\mathbf{0} \in W$, οπότε μόνο γεωμετρικά αντικείμενα «κεντραρισμένα» στην αρχή μπορούν να αποτελούν υποχώρους.

Παρουσιάζουμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4 (Έλεγχος υποχώρου στο $\mathbb{R}^3$)

Εξετάζουμε αν τα παρακάτω υποσύνολα είναι υποχώροι του $\mathbb{R}^3$:

$$(α') W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$$

$$(β') W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 2\}$$

ΛΥΣΗ: (α) Το $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ ικανοποιεί $2(0) - (0) + 3(0) = 0$, άρα $\mathbf{0} \in W_1$. Αν $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1$, τότε $2u_1 - u_2 + 3u_3 = 0$ και $2v_1 - v_2 + 3v_3 = 0$, άρα $2(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) + 3(u_3 + v_3) = 0$, δηλαδή $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1$. Ομοίως $\lambda \mathbf{u} \in W_1$. Άρα W_1 είναι υποχώρος (επίπεδο μέσω O).

(β) Το $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ δεν ανήκει στο W_2 αφού $0 + 0 + 0 = 0 \neq 2$. Άρα W_2 δεν είναι υποχώρος (επίπεδο που δεν διέρχεται από O).

Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$ είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^3$. Τι γεωμετρικό αντικείμενο αναπαριστά;
2. Εξετάστε αν $W = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ (επίπεδο xy) αποτελεί υποχώρο του $\mathbb{R}^3$.
3. Ποιοι από τους παρακάτω είναι υποχώροι του $\mathbb{R}^3$; (α) $W_1 = \{(t, 2t, 3t) : t \in \mathbb{R}\}$, (β) $W_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z\}$, (γ) $W_3 = \{(x, y, z) : x + y = 0, y + z = 0\}$.
4. Δείξτε ότι κάθε επίπεδο που δεν διέρχεται από την αρχή O δεν είναι υποχώρος.

Ασκήσεις

1. Εξετάστε αν $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$ είναι υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
2. Εξετάστε αν $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ είναι υποχώρος. Αιτιολογήστε.
3. Ποιοι υποχώροι του $\mathbb{R}^3$ είναι γεωμετρικά; Απαριθμήστε τους.
4. Εξετάστε αν $W = \{p \in \mathcal{P}_2 : p(1) = 0\}$ είναι υποχώρος του $\mathcal{P}_2$.
5. **(Ηλεκτρολόγοι)** Σε ηλεκτρικό δίκτυο με n κλάδους, θεωρήστε το σύνολο των διανυσμάτων ρεύματος $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$ που ικανοποιούν τον νόμο των κόμβων του Kirchhoff ($\sum i = 0$ σε κάθε κόμβο). Αποδείξτε ότι αποτελεί υποχώρο του $\mathbb{R}^n$.

1.4 Γραμμική Ανεξαρτησία (linear independence)

Γραμμική ανεξαρτησία: η καρδιά της αλγεβρικής δομής: Τα διανύσματα ενός συνόλου είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν κανένα από αυτά δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Αυτή η ιδιότητα είναι ο ακριβής τρόπος να πούμε ότι «δεν υπάρχει πλεονάζουσα πληροφορία»: κάθε διάνυσμα του συνόλου «συνεισφέρει» σε διαφορετική κατεύθυνση. Φυσικά ή μηχανικά, γραμμική ανεξαρτησία σημαίνει ότι τα διανύσματα αντιπροσωπεύουν ανεξάρτητες δομές (όπως οι διευθύνσεις των δυνάμεων που δεν μπορούν να ακυρώσουν η μία την άλλη). Στο $\mathbb{R}^2$, δύο διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν είναι παράλληλα. Στο $\mathbb{R}^3$, τρία διανύσματα είναι εξαρτημένα αν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Ο πιο συστηματικός έλεγχος γίνεται ελέγχοντας αν το ομογενές σύστημα $c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ έχει μόνο τη μηδενική λύση — ακριβώς το κριτήριο που μας δίνει και η ορίζουσα.

▶ ANIMATION Γραμμική (Αν)εξαρτησία — Διαδραστικό

Άλλαξε δύο διανύσματα και δεξ πότε σχηματίζουν παραλληλόγραμμα με μη μηδενικό εμβαδόν (ανεξάρτητα) ή πέφτουν στην ίδια ευθεία (εξαρτημένα). **Παρατήρηση:** η εξάρτηση εμφανίζεται ακριβώς όταν $\det = 0$ — δηλαδή όταν χάνεται μια διάσταση «πληροφορίας». **Σύνδεση:** ορισμός γραμμικής ανεξαρτησίας (Ορ. 2) και το κριτήριο της ορίζουσας (Θεώρ. 5).



ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2 --- Γραμμική Ανεξαρτησία

Τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ λέγονται **γραμμικώς ανεξάρτητα** αν η εξίσωση

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

έχει μόνη λύση $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$. Αλλιώς λέγονται **γραμμικώς εξαρτημένα**.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε χαρακτηριστικά παραδείγματα που αναδεικνύουν τον ορισμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5 (Γραμμική Εξάρτηση και Ανεξαρτησία — Πρώτα Παραδείγματα)

Εξετάστε αν τα ακόλουθα σύνολα διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή εξαρτημένα: (α) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ · (β) $\{(1, 2, 3), (2, 4, 6)\}$ · (γ) $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

ΛΥΣΗ: (α) **Ανεξάρτητα:** $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Από $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ προκύπτει $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$. Άρα γραμμικώς **ανεξάρτητα**.

(β) **Εξαρτημένα:** $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 6)$. Τότε $2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, οπότε υπάρχουν $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1 \neq 0$. Γραμμικώς **εξαρτημένα**: το $\mathbf{v}_2$ είναι απλώς το διπλάσιο του $\mathbf{v}_1$.

(γ) **Κριτήριο με πίνακα:** Τα $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$ είναι γ.α.; Ανάγουμε τον 3×3 πίνακα που έχει αυτά ως στήλες:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Τρεις οδηγοί $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ γραμμικώς **ανεξάρτητα**. ■

1.4.1 Κριτήρια Γραμμικής Ανεξαρτησίας

Ακολουθούν τα κυριότερα κριτήρια ελέγχου γραμμικής ανεξαρτησίας, τα οποία χρησιμοποιούνται ευρέως στην πράξη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4 --- Κριτήριο για Δύο Διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ είναι **γραμμικώς εξαρτημένα** αν και μόνο αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ (ή ισοδύναμα $\mathbf{v} = c'\mathbf{u}$). Γεωμετρικά στο $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα είναι **παράλληλα**.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σκανάρε για βήμα-βήμα απόδειξη με γεωμετρική διαίσθηση, τυπική τεκμηρίωση και μηχανική εφαρμογή. Στη σελίδα επιλέγεις Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο. Επαλήθευσε πάντα με βάση τη θεωρία.

Βλ. [? ? ?]



(Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο)

Μια στενά συνδεδεμένη ιδιότητα είναι η ακόλουθη:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.5 --- Κριτήριο Ορίζουσας για Τρία Διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$

Τα $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ στο $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν:

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σκανάρε για βήμα-βήμα απόδειξη με γεωμετρική διαίσθηση, τυπική τεκμηρίωση και μηχανική εφαρμογή. Στη σελίδα επιλέγεις Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο. Επαλήθευσε πάντα με βάση τη θεωρία.

Βλ. [? ? ? ?]



(Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα)

Το παρακάτω παράδειγμα φωτίζει τη χρήση της ιδιότητας σε συγκεκριμένο πλαίσιο:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.6 (Έλεγχος με ορίζουσα)

Ελέγχουμε αν $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 5, 6)$, $\mathbf{w} = (7, 8, 10)$ είναι γ.α. στο $\mathbb{R}^3$.

ΛΥΣΗ:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} = 1(50 - 48) - 4(20 - 24) + 7(12 - 15) = 2 + 16 - 21 = -3 \neq 0.$$

Άρα τα τρία διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. ■

Η υπολογιστική υλοποίηση της μεθόδου γίνεται με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού:

cas 1.1 --- Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας στο Maxima

Δίνονται δύο πίνακες. Ο πρώτος A περιέχει τρία διανύσματα ως στήλες: $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3)^T$, $\mathbf{a}_2 = (4, 5, 6)^T$, $\mathbf{a}_3 = (7, 8, 10)^T$. Υπολογίστε την ορίζουσά του για να ελέγξετε αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Για τον δεύτερο πίνακα B με στήλες $\mathbf{b}_1 = (1, 0, 2)^T$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, -1)^T$, $\mathbf{b}_3 = (2, 3, 1)^T$, υπολογίστε τον πυρήνα ο οποίος δείχνει τις σχέσεις γραμμικής εξάρτησης.

```
/* Πρώτος πίνακας A: ανεξάρτητα διανύσματα */
A: matrix([1, 4, 7],
[2, 5, 8],
[3, 6, 10]);

/* Υπολογισμός ορίζουσας A */
determinant(A); /* -3 ≠ 0 => διανύσματα γα .. */

/* Δεύτερος πίνακας B: εξαρτημένα διανύσματα */
B: matrix([1, 0, 2],
[0, 1, -1],
[2, 3, 1]);

/* Ορίζουσα του B */
determinant(B); /* 0 => διανύσματα γα .. */

/* Πυρήνας: γραμμικές σχέσεις εξάρτησης */
nullspace(B); /* Δίνει τη βάση του πυρήνα */
```

Εξήγηση: Η ορίζουσα του πίνακα A είναι -3 (μη μηδενική), άρα οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και σχηματίζουν βάση του $\mathbb{R}^3$. Η ορίζουσα του B είναι 0 , δηλώνοντας ότι υπάρχει μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των στηλών που δίνει το μηδέν. Ο πυρήνας δίνει τους ακριβείς συντελεστές αυτής της σχέσης εξάρτησης.

Το ίδιο πρόβλημα αντιμετωπίζεται αποτελεσματικά και με άλλα υπολογιστικά εργαλεία:

python 1.1 --- Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας με Python

Χρησιμοποίησε NumPy για να ελέγξεις γραμμική ανεξαρτησία μέσω ορίζουσας και πυρήνα.

```
import numpy as np

v1 = np.array([1, 2, 3])
v2 = np.array([4, 5, 6])
v3 = np.array([7, 8, 10])

M = np.array([v1, v2, v3])
rank = np.linalg.matrix_rank(M)
print(f"Κατάταξη πίνακα: {rank}")
print("Γραμμικά ανεξάρτητα:", rank == 3) # True → ανεξάρτητα
# --> Πλήρης κώδικας με γραφικές παραστάσεις : βλ. Παράρτημα Β
```

Το αποτέλεσμα της υπολογιστικής διαδικασίας φωτίζει το παράδειγμα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.7 (Εξαρτημένο σύνολο --- εύρεση σχέσης εξάρτησης)

Εξετάζουμε τα $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 3)$, $\mathbf{w} = (2, -1, 1)$ στο $\mathbb{R}^3$.

ΛΥΣΗ: Πρώτα ελέγχουμε με ορίζουσα:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1(1 + 3) - 0 + 2(0 - 2) = 4 - 4 = 0.$$

Άρα είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Βρίσκουμε τη σχέση εξάρτησης λύνοντας $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από τη 2η γραμμή: $b = c$. Από την 1η: $a = -2c$. Θέτοντας $c = 1$: $a = -2$, $b = 1$, οπότε

$$-2\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}.$$

Επαλήθευση: $2(1, 0, 2) - (0, 1, 3) = (2, 0, 4) - (0, 1, 3) = (2, -1, 1) = \mathbf{w}$. ✓

Το παραπάνω παράδειγμα αναδεικνύει μια γενικότερη ιδιότητα που αξίζει να διατυπωθεί επίσης:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.6 --- Κριτήριο γραμμικής εξάρτησης μέσω γ.σ.

Τα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν τουλάχιστον ένα από αυτά εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σκανάρε για βήμα-βήμα απόδειξη με γεωμετρική διαίσθηση, τυπική τεκμηρίωση και μηχανική εφαρμογή. Στη σελίδα επιλέγεις Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο. Επαλήθευσε πάντα με βάση τη θεωρία.

Βλ. [? ? ? ?]



(Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο)

Η γραμμική ανεξαρτησία εντοπίζει τα «απαραίτητα» στοιχεία ενός συνόλου: εκείνα που δεν μπορούν να εκφραστούν μέσω των υπολοίπων. Συνδυάζοντας την ανεξαρτησία με την ιδιότητα του span, φτάνουμε στην κεντρικότερη έννοια της θεωρίας χώρων: τη *βάση* --- ένα ελάχιστο σύνολο στοιχείων που «ανοικοδομεί» ολόκληρο τον χώρο.

Ασκήσεις

- Εξετάστε αν $\{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (1, 0, -1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- Βρείτε τιμές του λ για τις οποίες $\{(1, 0, 0), (0, 1, \lambda), (\lambda, 1, 0)\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
- Αποδείξτε ότι αν $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\}$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.
- Εξετάστε αν $\{1, \sin^2 t, \cos^2 t\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο $\mathcal{C}[0, 2\pi]$.
- Αποδείξτε: αν $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ γ.α. και $\mathbf{w} \in \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$, τότε $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{w}\}$ είναι

γ.ε.

6. Εξετάστε αν $\{t+1, t^2-1, t^2+t\}$ είναι γ.α. στο $\mathcal{P}_2$.

7. (Μηχανολ./Στατική) Εξετάστε αν οι δυνάμεις

$\mathbf{f}_1 = (2, 1)$ και $\mathbf{f}_2 = (-1, 3)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αν ναι, εξηγήστε γιατί κάθε δύναμη του επιπέδου αναλύεται μοναδικά κατά τις δύο αυτές διευθύνσεις.

1.5 Βάση και Διάσταση

Η γραμμική ανεξαρτησία απαντά στο ερώτημα «ποια στοιχεία είναι *απαραίτητα*;». Ο συνδυασμός της με τη δυνατότητα *παραγωγής* ολόκληρου του χώρου οδηγεί στην κεντρική έννοια της **βάσης**:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3 --- Βάση Γραμμικού Χώρου

Ένα σύνολο $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ ονομάζεται **βάση** του V αν:

- (i) $\mathcal{B}$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητο**, και
- (ii) $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ (**παράγον σύνολο**).

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε χαρακτηριστικά παραδείγματα που αναδεικνύουν τον ορισμό.

► ANIMATION Βάση & Γεννημένος Χώρος — Διαδραστικό

Ρύθμισε τους συντελεστές c_1, c_2 και φτιάξε γραμμικούς συνδυασμούς $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ · δες ποιο μέρος του επιπέδου «καλύπτεται».
Παρατήρηση: δύο ανεξάρτητα διανύσματα γεννούν όλο το $\mathbb{R}^2$, ενώ δύο εξαρτημένα γεννούν μόνο μία ευθεία. **Σύνδεση:** ορισμός βάσης (Ορ. 3) — ανεξαρτησία και παραγωγή του χώρου.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.8 (Τυπικές βάσεις)

Να αναγνωριστεί η τυπική βάση για καθέναν από τους χώρους $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_n$ (πολυώνυμα βαθμού $\leq n$) και $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

ΛΥΣΗ:

- **Τυπική βάση του $\mathbb{R}^n$:** $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ με $\mathbf{e}_i$ ο i -οστός μοναδιαίος άξονας. Π.χ. στο $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.
- **Τυπική βάση του $\mathcal{P}_n$:** $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ — πολυώνυμα βαθμού $\leq n$.
- **Τυπική βάση του $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$:** πίνακες E_{ij} με 1 στη θέση (i, j) και 0 αλλού.

Ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα: κάθε σύνολο που «αντικαθιστά» τη βάση έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων — αυτό ορίζει τη **διάσταση**.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1 --- Θεώρημα Βάσης — Μοναδικότητα Πλήθους

Αν $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$ είναι δύο βάσεις πεπερασμένης διάστασης του V , τότε $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σκανάρε για βήμα-βήμα απόδειξη με γεωμετρική διαίσθηση, τυπική τεκμηρίωση και μηχανική εφαρμογή. Στη σελίδα επιλέγεις Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο. Επαλήθευσε πάντα με βάση τη θεωρία.

Βλ. [? ? ? ?]



(Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα)

Ορίζουμε την έννοια της διάστασης ενός διανυσματικού χώρου, που παίζει κεντρικό ρόλο στη θεωρία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4 --- Διάσταση

Η **διάσταση** ενός V , συμβολισμός $\dim V$, είναι το πλήθος των στοιχείων οποιασδήποτε (πεπερασμένης) βάσης του V . Συμβατικά: $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε χαρακτηριστικά παραδείγματα που αναδεικνύουν τον ορισμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.9 (Διαστάσεις κλασικών χώρων)

Να βρεθεί η διάσταση καθενός από τους χώρους $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ και $\{\mathbf{0}\}$.

ΛΥΣΗ:

- $\dim \mathbb{R}^n = n$
- $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$
- $\dim \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) = mn$
- $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$

Για άπειρης διάστασης χώρους (π.χ. $\mathcal{C}[a, b]$, $\mathcal{P}$) γράφουμε $\dim V = \infty$.

Στη συνέχεια διατυπώνουμε το βασικό θεώρημα που απορρέει από τα παραπάνω.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2 --- Κριτήρια Βάσης

Έστω V γραμμικός χώρος με $\dim V = n < \infty$. Τότε ένα σύνολο S με $|S| = n$ στοιχείων αποτελεί βάση του V αν και μόνο αν ένα από τα παρακάτω ισχύει:

- S είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
- S παράγει τον V (δηλ. $\text{span}(S) = V$).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σκανάρε για βήμα-βήμα απόδειξη με γεωμετρική διαίσθηση, τυπική τεκμηρίωση και μηχανική εφαρμογή. Στη σελίδα επιλέγεις Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο. Επιλήθευσε πάντα με βάση τη θεωρία.

Βλ. [? ? ? ?]



(Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο)

Ως άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος προκύπτει ότι κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση του χώρου.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7 --- Επέκταση σε Βάση

Κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο S ενός n -διάστατου χώρου V μπορεί να επεκταθεί σε βάση του V (με προσθήκη κατάλληλων στοιχείων από το V).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σκανάρε για βήμα-βήμα απόδειξη με γεωμετρική διαίσθηση, τυπική τεκμηρίωση και μηχανική εφαρμογή. Στη σελίδα επιλέγεις Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο. Επιλήθευσε πάντα με βάση τη θεωρία.

Βλ. [? ? ? ?]



(Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο)

Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει τη χρήση των κριτηρίων βάσης και της επέκτασης:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.10 (Κριτήριο και επέκταση σε βάση)

(enimi) Δείξτε ότι τα $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο $\mathbb{R}^3$ και επεκτείνετε τα σε βάση του $\mathbb{R}^3$.

(enimi) Με το κριτήριο βάσης, ελέγξτε αν τα $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.

ΛΥΣΗ: (α) Τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι γ.α. (κανένα δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου). Παράγουν το επίπεδο $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, με εξίσωση $x - y + z = 0$. Αφού $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, αρκεί να προσθέσουμε ένα διάνυσμα εκτός αυτού του επιπέδου: το $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ δεν το ικανοποιεί ($1 - 0 + 0 = 1 \neq 0$). Άρα τα $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1\}$ είναι τρία γ.α. διανύσματα σε χώρο διάστασης 3, οπότε — από το Θεώρημα Κριτηρίων Βάσης (2) — αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.

(β) Έχουμε τρία διανύσματα σε χώρο διάστασης 3· κατά το κριτήριο βάσης αρκεί να ελέγξουμε ένα από τα δύο σκέλη (γ.α. ή παραγωγή). Με ορίζουσα:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1(2 - 1) - 0 + 1(0 - 1) = 1 - 1 = 0.$$

Η ορίζουσα είναι 0, άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα και δεν αποτελούν βάση (πράγματι $(1, 1, 2) = (1, 0, 1) + (0, 1, 1)$).

Αξίζει να επισημανθεί ότι κάθε στοιχείο του χώρου μπορεί να αναπαρασταθεί μοναδικά με τις συντεταγμένες του ως προς μια δεδομένη βάση.

Σχόλιο 1.3 --- Συντεταγμένες ως προς βάση

Αν $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ βάση του V και $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$, τότε οι βαθμωτοί $c_1, \dots, c_n$ είναι μοναδικοί και ονομάζονται **συντεταγμένες** του $\mathbf{x}$ ως προς $\mathcal{B}$: $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (c_1, \dots, c_n)^T$.

Ο τρόπος εύρεσης βάσης υποχώρου που ορίζεται από εξισώσεις γίνεται σαφής με τον επόμενο υπολογισμό:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.11 (Βάση υποχώρου του $\mathbb{R}^4$ μέσω ελεύθερων μεταβλητών)

Βρείτε βάση και διάσταση του υποχώρου

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0, \quad 2x + z - w = 0\}.$$

ΛΥΣΗ: Από τις δύο εξισώσεις εκφράζουμε τις δεσμευμένες μεταβλητές x και w συναρτήσει των ελεύθερων y, z :

$$x = y - z \quad (\text{από 1η εξίσωση}),$$

$$w = 2x + z = 2(y - z) + z = 2y - z \quad (\text{από 2η εξίσωση}).$$

Κάθε διάνυσμα του W γράφεται:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \\ 2y - z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Άρα $W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ με $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1, -1)$.

Τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι γ.α. (ένα δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου), άρα αποτελούν βάση του W :

$$\mathcal{B}_W = \{(1, 1, 0, 2), (-1, 0, 1, -1)\}, \quad \dim W = 2.$$

1.5.1 Αλλαγή Βάσης

Κάθε διάνυσμα έχει μοναδικές συντεταγμένες ως προς μια δοθείσα βάση. Όταν όμως δουλεύουμε ταυτόχρονα με δύο βάσεις, χρειαζόμαστε έναν συστηματικό τρόπο μετατροπής των συντεταγμένων από τη μία στην άλλη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5 --- Πίνακας Αλλαγής Βάσης

Έστω $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ και $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ δύο βάσεις ενός n -διάστατου χώρου V . Ο **πίνακας αλλαγής βάσης** (ή **πίνακας μετάβασης**) $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων της $\mathcal{B}$ ως προς τη $\mathcal{C}$:

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \mid \dots \mid [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}},$$

και ισχύει $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ για κάθε $\mathbf{x} \in V$. Ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος, με $P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}})^{-1}$.

Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει τη χρήση του σε συγκεκριμένο πλαίσιο:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.12 (Αλλαγή βάσης και συντεταγμένες στο $\mathbb{R}^2$)

Δίνονται η βάση $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ και η τυπική βάση $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ του $\mathbb{R}^2$.

(enumi) Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}}$.

(enumi) Υπολογίστε τις συντεταγμένες του $\mathbf{x} = (3, 7)$ ως προς τη $\mathcal{B}$.

ΛΥΣΗ: (α) Οι στήλες του $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}}$ είναι οι συντεταγμένες των $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, -1)$ ως προς την τυπική βάση — δηλαδή τα ίδια τα διανύσματα:

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(β) Ζητάμε $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (c_1, c_2)^\top$ με $\mathbf{x} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, δηλαδή λύνουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 - c_2 = 7 \end{cases} \implies c_1 = 5, c_2 = -2.$$

Άρα $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (5, -2)^\top$, δηλαδή $\mathbf{x} = 5\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2$. Επαλήθευση: $5(1, 1) - 2(1, -1) = (3, 7)$. ✓

Ισοδύναμα, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}})^{-1} \mathbf{x}$, με $(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ασκήσεις

- Βρείτε βάση και διάσταση του $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0, z - w = 0\}$.
- Αποδείξτε ότι $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$.
- Βρείτε βάση του $\mathcal{P}_2$ που περιέχει το $p(t) = t^2 + t + 1$.
- Ποια η διάσταση του $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$; Δώστε βάση.
- Εκφράστε το $\mathbf{v} = (3, 7)$ στη βάση $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, -1)\}$.
- Βρείτε αλλαγή βάσης από $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ στην τυπική βάση του $\mathbb{R}^2$.
- Βρείτε υποχώρο $W \subset \mathbb{R}^3$ διάστασης 2 που να περιέχει τα $(1, 1, 0)$ και $(0, 1, 1)$. Είναι μοναδικός;
- Βρείτε βάση και τη διάσταση $\dim W$ του $W = \{(x, y, z) : x - y + 2z = 0, 2x + y - z = 0\}$.
- (Γενικό — μηχανική) Δείξτε ότι δύο μη παράλληλες δυνάμεις του επιπέδου αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^2$. Αναλύστε τη δύναμη $\mathbf{F} = (5, 3)$ ως προς τη βάση $\{(2, 1), (1, 1)\}$ και επιβεβαιώστε ότι οι συνιστώσες είναι μοναδικές.

1.6 Αθροισμα Υποχώρων και Διάσταση

Όταν έχουμε δύο υποχώρους ενός χώρου, μπορούμε να σχηματίσουμε νέους υποχώρους συνδυάζοντάς τους. Η τομή και το άθροισμά τους αποτελούν επίσης υποχώρους, και το Θεώρημα Grassmann δίνει μια ακριβή σχέση μεταξύ των διαστάσεών τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6 --- Άθροισμα Υποχώρων

Έστω W_1, W_2 υποχώροι ενός γραμμικού χώρου V . Το **άθροισμα** τους ορίζεται ως:

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 : \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\}.$$

Τόσο η **τομή** $W_1 \cap W_2$ όσο και το **άθροισμα** $W_1 + W_2$ είναι υποχώροι του V .

Ο ορισμός αυτός επιτρέπει τη διατύπωση ενός θεμελιώδους θεωρήματος:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3 --- Φόρμουλα Grassmann

Έστω W_1, W_2 υποχώροι πεπερασμένης διάστασης ενός V . Τότε:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σκανάρε για βήμα-βήμα απόδειξη με γεωμετρική διαίσθηση, τυπική τεκμηρίωση και μηχανική εφαρμογή. Στη σελίδα επιλέγεις Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο. Επαλήθευσε πάντα με βάση τη θεωρία.

Βλ. [? ? ? ?]



(Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο)

Εφαρμόζουμε το παραπάνω θεώρημα σε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.13 (Εφαρμογή της φόρμουλας Grassmann)

Στο $\mathbb{R}^4$, εφαρμόστε τη φόρμουλα Grassmann για υποχώρους W_1 (2-διάστατο) και W_2 (3-διάστατο).

ΛΥΣΗ: Στο $\mathbb{R}^4$, ορίζουμε: $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_2 = 0, x_3 = 0\}$ (επίπεδο 2 διαστ.) και $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_4 = 0\}$ (υπερεπίπεδο 3 διαστ.).

Βάση W_1 : $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, άρα $\dim W_1 = 2$. Βάση W_2 : $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$, άρα $\dim W_2 = 3$. Η $W_1 \cap W_2$: $x_1 = x_2, x_3 = 0, x_4 = 0$ οπότε βάση $\{(1, 1, 0, 0)\}$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

Κατά Grassmann: $\dim(W_1 + W_2) = 2 + 3 - 1 = 4$, δηλαδή $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$. ■

Με βάση αυτή τη διαπίστωση, εισάγουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7 --- Ευθύς Άθροισμα (Direct Sum)

Ένας γραμμικός χώρος V είναι **ευθύς άθροισμα** των υποχώρων W_1 και W_2 (συμβολισμός: $V = W_1 \oplus W_2$) αν:

- (i) $V = W_1 + W_2$ (κάθε $\mathbf{v} \in V$ γράφεται ως $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$), και
- (ii) $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ (μοναδική αποσύνθεση).

Ισοδύναμα, $V = W_1 \oplus W_2$ αν και μόνο αν κάθε $\mathbf{v} \in V$ γράφεται **μοναδικά** ως $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ με $\mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2$.

Ο ορισμός αυτός επιτρέπει τη διατύπωση ενός θεμελιώδους θεωρήματος:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4 --- Ευθύς Άθροισμα και Διάσταση

$$V = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow \dim V = \dim W_1 + \dim W_2 \text{ και } W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σκανάρε για βήμα-βήμα απόδειξη με γεωμετρική διαίσθηση, τυπική τεκμηρίωση και μηχανική εφαρμογή. Στη σελίδα επιλέγεις Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο. Επιλέχθηκε πάντα με βάση τη θεωρία.

Βλ. [? ? ? ?]



(Μεγάλο Γλωσσικό Μοντέλο)

Εφαρμόζουμε το παραπάνω θεώρημα σε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.14 (Παράδειγμα ευθέος αθροίσματος)

Δείξτε ότι $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ όπου W_1 ο x -άξονας και W_2 το yz -επίπεδο.

ΛΥΣΗ: Στο $\mathbb{R}^3$, ο άξονας x : $W_1 = \text{span}\{(1, 0, 0)\}$ και το yz -επίπεδο: $W_2 = \text{span}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ικανοποιούν $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ και $\dim W_1 + \dim W_2 = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Άρα $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$. Κάθε $\mathbf{v} = (a, b, c)$ αναλύεται μοναδικά: $\mathbf{v} = \underbrace{(a, 0, 0)}_{\in W_1} + \underbrace{(0, b, c)}_{\in W_2}$.

Ασκήσεις

1. Στον $\mathbb{R}^3$ δίνονται $W_1 = \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ και $W_2 = \text{span}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Βρείτε τα $W_1 + W_2$ και $W_1 \cap W_2$ και επαληθεύστε τη φόρμουλα Grassmann.
2. Αποδείξτε ότι η τομή $W_1 \cap W_2$ δύο υποχώρων είναι υποχώρος.
3. Δείξτε με παράδειγμα ότι η ένωση $W_1 \cup W_2$ δύο υποχώρων δεν είναι πάντα υποχώρος.
4. Στον $\mathbb{R}^4$ έστω $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2\}$ και $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_3 = x_4 = 0\}$. Υπολογίστε $\dim(W_1 + W_2)$ και $\dim(W_1 \cap W_2)$ με τη φόρμουλα Grassmann.
5. Αποδείξτε ότι $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ για W_1 τον x -άξονα και W_2 το yz -επίπεδο, και αναλύστε το $(2, 3, 5)$ ως $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$.
6. Αν $V = W_1 \oplus W_2$ με $\dim V = n$ και $\dim W_1 = k$, βρείτε $\dim W_2$. Αιτιολογήστε με το θεώρημα ευθέος αθροίσματος.

1.7 Γραμμικές Απεικονίσεις

Έχοντας ορίσει τους γραμμικούς χώρους και τις βάσεις τους, εισάγουμε εδώ εν συντομία τις δομή-διατηρούσες απεικονίσεις μεταξύ τους — όσα χρειαζόμαστε για να δούμε ότι ο πυρήνας και η εικόνα μιας τέτοιας απεικόνισης είναι υποχώροι. Η αναλυτική μελέτη (θεώρημα διάστασης, μήτρα μετασχηματισμού, σύνθεση, ισομορφισμοί, αλλαγή βάσης) αναπτύσσεται στο **Κεφάλαιο 4**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8 --- Γραμμική Απεικόνιση

Μια απεικόνιση $T : V \rightarrow W$ μεταξύ γραμμικών χώρων ονομάζεται **γραμμική** αν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) && \text{(προσθετικότητα)} \\ T(\lambda \mathbf{x}) &= \lambda T(\mathbf{x}) && \text{(ομογένεια)} \end{aligned}$$

Ισοδύναμα: $T(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda T(\mathbf{x}) + \mu T(\mathbf{y})$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε χαρακτηριστικά παραδείγματα που αναδεικνύουν τον ορισμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.15 (Βασικά παραδείγματα γραμμικών απεικονίσεων)

Να αναγνωριστούν και να επαληθευτούν ως γραμμικές οι απεικονίσεις: ο πολλαπλασιασμός με πίνακα $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, η παράγωγος $D(p) = p'$, το ολοκλήρωμα $I(f) = \int_a^b f$, η ταυτοτική και η μηδενική απεικόνιση.

ΛΥΣΗ:

- **Πολλαπλασιασμός με πίνακα:** $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Κάθε $m \times n$ πίνακας A ορίζει γραμμική απεικόνιση.
- **Παράγωγος:** $D : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}$, $D(p) = p'$.
- **Ολοκλήρωμα:** $I : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $I(f) = \int_a^b f(x) dx$.
- **Ταυτοτική:** $\text{Id}_V : V \rightarrow V$, $\text{Id}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.
- **Μηδενική:** $\mathbf{0} : V \rightarrow W$, $\mathbf{0}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W$.

Η παραπάνω ανάλυση οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9 --- Πυρήνας και Εικόνα

Για $T : V \rightarrow W$ γραμμική ορίζουμε:

$$\ker T = \{\mathbf{x} \in V : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W\} \quad \text{(πυρήνας)}$$

$$\text{Im } T = \{T(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V\} = T(V) \quad \text{(εικόνα)}$$

Τόσο ο $\ker T$ όσο και η $\text{Im } T$ είναι υποχώροι (του V και W αντίστοιχα).

Δείχνουμε τον υπολογισμό τους σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.16 (Υπολογισμός $\ker T$ και $\text{Im } T$ — Παράδειγμα)

Για $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$, βρείτε τον πυρήνα $\ker T$ και την εικόνα $\text{Im } T$.