ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Γραμμικοί Διανυσματικοί Χώροι

▶ Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

- ▷ Να ορίζετε γραμμικό διανυσματικό χώρο και να επαληθεύετε τα αξιώματα.
- ▷ Να αναγνωρίζετε και να αποδεικνύετε αν ένα υποσύνολο είναι υπόχωρος.
- ▷ Να εργάζεστε με γραμμικούς συνδυασμούς, γραμμική ανεξαρτησία και βάση.
- ▷ Να υπολογίζετε τη διάσταση ενός γραμμικού χώρου.
- ▷ Να αλλάζετε βάση και να υπολογίζετε συντεταγμένες διανυσμάτων.
- ▷ Να εφαρμόζετε τις έννοιες αυτές σε χώρους πολυωνύμων και πινάκων.
- ▷ Να χρησιμοποιείτε το εσωτερικό γινόμενο για μήκη, γωνίες και προβολές και να ορθοκανονικοποιείτε βάσεις (Gram–Schmidt, QR).
- ▷ Να γράφετε εξισώσεις ευθειών και επιπέδων στον $\mathbb{R}^3$ και να υπολογίζετε αποστάσεις και γωνίες.
- ▷ Να λύνετε προβλήματα ελαχίστων τετραγώνων ως ορθογώνια προβολή.

≡ Περιεχόμενα Κεφαλαίου

1.1 Εισαγωγή 68
1.2 Ορισμός Γραμμικού Διανυσματικού Χώρου 69
1.3 Υπόχωροι 71
1.4 Γραμμική Ανεξαρτησία 74
1.5 Βάση και Διάσταση 78
1.6 Άθροισμα Υποχώρων και Διάσταση 82
1.7 Άλγεβρα πάνω στο $\mathbb{R}$ 83
1.8 Εσωτερικό Γινόμενο και Ορθογωνιότητα 85
1.9 Εφαρμογές 100
1.10 Λυμένες Ασκήσεις 101
1.11 Ανακεφαλαίωση 107
1.12 Δραστηριότητες CAS, Python & TN 108
1.13 Δραστηριότητες Βαθιάς Σκέψης 110
1.14 Ασκήσεις 110

1.1 Εισαγωγή

Οι γραμμικοί διανυσματικοί χώροι αποτελούν μια από τις θεμελιώδεις έννοιες της σύγχρονης Άλγεβρας, με ευρύτατες εφαρμογές στα μαθηματικά, τη φυσική, τη μηχανική και την επιστήμη των υπολογιστών. Η ιδέα ενός διανυσματικού χώρου γενικεύει τις γνωστές ιδιότητες των διανυσμάτων του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ και του χώρου $\mathbb{R}^3$ σε αφηρημένα σύνολα, όπου τα στοιχεία μπορεί να είναι πολυώνυμα, μιγαδικοί αριθμοί, πίνακες ή ακόμα και συναρτήσεις.

Η δύναμη της έννοιας αυτής έγκειται ακριβώς σε αυτή τη γενικότητα: οποτεδήποτε αποδειχθεί ότι ένα σύνολο αποτελεί γραμμικό χώρο, το σύνολο των αποτελεσμάτων που έχουν αποδειχθεί για αφηρημένους διανυσματικούς χώρους εφαρμόζεται αυτόματα. Η θεωρία μάς δίνει έτσι ένα ενιαίο πλαίσιο για τη μελέτη φαινομενικά διαφορετικών δομών.

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζουμε αυστηρά την έννοια του γραμμικού διανυσματικού χώρου, εξετάζουμε τα κυριότερα παραδείγματα που συναντά ο μηχανικός και αναπτύσσουμε τις βασικές έννοιες: υπόχωρος, γραμμική ανεξαρτησία, βάση και διάσταση. Κλείνουμε με τη γενίκευση της έννοιας της *άλγεβρας* πάνω στο $\mathbb{R}$.

BIO Ιστορικό Σημείωμα – *Hermann Grassmann (1809-1877)*

Ο Γερμανός **Hermann Grassmann** γενίκευσε το 1844 τα διανύσματα σε οποιονδήποτε αριθμό διαστάσεων, με καθαρά αλγεβρική σκέψη και χωρίς φυσικό πρότυπο. Η ιδέα αγνοήθηκε για δεκαετίες· την αξιωματική μορφή του διανυσματικού χώρου έδωσε ο **Giuseppe Peano** (1888). Η αφαίρεση αυτή επιτρέπει στον μηχανικό να χειρίζεται με τα ίδια εργαλεία δυνάμεις, ρεύματα και μετρήσεις αισθητήρων.

Σαρώστε για περισσότερα βιογραφικά στοιχεία.

Βλ. [7, 23, 34]

Τα παραδείγματα αυτά ανέδειξαν πόσο διαφορετικά μαθηματικά αντικείμενα (διανύσματα, πολυώνυμα, πίνακες, συναρτήσεις) μοιράζονται τις ίδιες αλγεβρικές ιδιότητες. Για να αξιοποιήσουμε αυτή τη δομική ομοιότητα, ορίζουμε αυστηρά την έννοια του *γραμμικού διανυσματικού χώρου* μέσα από ένα σύνολο αξιωμάτων.

Εργαλειοθήκη – Πίνακες & Ορίζουσες (προεπισκόπηση)

Σε ορισμένα σημεία του κεφαλαίου χρησιμοποιούμε *πίνακες* και *ορίζουσες* ως υπολογιστικά εργαλεία, π.χ. για να ελέγξουμε γραμμική ανεξαρτησία ή να περιγράψουμε τον πυρήνα και την εικόνα μιας απεικόνισης. Εδώ συνοψίζουμε μόνο όσα θα χρειαστούμε· ο πλήρης και αυστηρός ορισμός, οι ιδιότητες και οι αποδείξεις δίνονται στο **Κεφάλαιο 2**.

Πίνακας: Ένας $m \times n$ **πίνακας** $A = (a_{ij})$ είναι μια ορθογώνια διάταξη πραγματικών αριθμών με m γραμμές και n στήλες· για $m = n$ λέγεται **τετραγωνικός**.

Γινόμενο πίνακα–διανύσματος. Αν ο A είναι $m \times n$ με στήλες $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ και $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$, τότε

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m,$$

δηλαδή το $A\mathbf{x}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A, γεγονός που συνδέει άμεσα τους πίνακες με τους γραμμικούς χώρους.

Ορίζουσα: Υπενθυμίζουμε (Κεφ. 0) την ορίζουσα 2×2, $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$. Για 3×3 αναπτύσσουμε ως προς την πρώτη γραμμή:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = a_1 \det \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} - a_2 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} + a_3 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Η ιδιότητα που θα αξιοποιήσουμε επανειλημμένα: η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα είναι $\neq 0$ αν και μόνο αν οι στήλες του (ισοδύναμα οι γραμμές του) είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Πλήρης μελέτη (ορίζουσες, τάξη, πράξεις, αντίστροφος): Κεφάλαιο 2.

συνέχεια στην επόμενη σελίδα ↪

Εργαλειοθήκη (συνέχεια)

Απαλοιφή Gauss, κλιμακωτή μορφή, βαθμός: Με *στοιχειώδεις γραμμοπράξεις* (εναλλαγή γραμμών, πολλαπλασιασμός γραμμής με $c \neq 0$, πρόσθεση πολλαπλάσιου γραμμής σε άλλη) κάθε πίνακας ανάγεται σε **κλιμακωτή μορφή**: κάθε μη μηδενική γραμμή ξεκινά με ένα **οδηγό στοιχείο** (pivot), δεξιότερα από το οδηγό στοιχείο της προηγούμενης. Ο αριθμός των οδηγών στοιχείων είναι ο **βαθμός** (rank) του πίνακα και δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθήσαμε. Θα τον χρησιμοποιούμε ως κριτήριο γραμμικής ανεξαρτησίας: k διανύσματα είναι ανεξάρτητα ακριβώς όταν ο πίνακας που τα έχει ως στήλες έχει βαθμό k. Η πλήρης ανάπτυξη γίνεται στα Κεφάλαια 2 και 3.

1.2 Ορισμός Γραμμικού Διανυσματικού Χώρου

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 – *Γραμμικός Διανυσματικός Χώρος*

Έστω V ένα μη κενό σύνολο και $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Το V ονομάζεται **γραμμικός** (ή **διανυσματικός**) **χώρος πάνω στο** $\mathbb{R}$ αν έχουν ορισθεί σε αυτό δύο πράξεις:

- **Εσωτερική:** πρόσθεση $+ : V \times V \to V,\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$
- **Εξωτερική:** βαθμωτός πολλαπλασιασμός $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V,\ (\lambda, \mathbf{u}) \mapsto \lambda\mathbf{u}$

που ικανοποιούν τα παρακάτω **οκτώ αξιώματα**. Στα $(\mathbf{A_1})$, $(\mathbf{A_2})$ και σε όλα τα $(\mathbf{B_i})$ οι ισότητες ισχύουν *για κάθε* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ και *για κάθε* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$· στα $(\mathbf{A_3})$ και $(\mathbf{A_4})$ προσέξτε τη σειρά των ποσοδεικτών:

Αξιώματα πρόσθεσης:

$(\mathbf{A_1})$	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	(Αντιμεταθετικότητα)
$(\mathbf{A_2})$	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$	(Προσεταιριστικότητα)
$(\mathbf{A_3})$	$\exists\, \mathbf{0} \in V \ \forall\, \mathbf{u} \in V :\ \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	(Μηδενικό στοιχείο)
$(\mathbf{A_4})$	$\forall\, \mathbf{u} \in V \ \exists\, (-\mathbf{u}) \in V :\ \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$	(Αντίθετο στοιχείο)

Αξιώματα βαθμωτού πολλαπλασιασμού:

$(\mathbf{B_1})$	$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$	(Μοναδιαίο βαθμωτό)
$(\mathbf{B_2})$	$(\lambda\mu)\mathbf{u} = \lambda(\mu\mathbf{u})$	(Προσεταιριστικότητα)
$(\mathbf{B_3})$	$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$	(Διανεμητικότητα ως προς V)
$(\mathbf{B_4})$	$(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$	(Διανεμητικότητα ως προς $\mathbb{R}$)

Τα στοιχεία του V ονομάζονται **διανύσματα** και τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ ονομάζονται **βαθμωτοί** ή **βαθμωτά**.

Ο ορισμός δόθηκε πάνω στο $\mathbb{R}$· η επιλογή αυτή δεν είναι δεσμευτική:

Σχόλιο 1.1

Αν αντί για το $\mathbb{R}$ χρησιμοποιήσουμε το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, ορίζουμε αναλόγως γραμμικό χώρο πάνω στο $\mathbb{C}$. Στο μάθημα αυτό εργαζόμαστε κυρίως πάνω στο $\mathbb{R}$, εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι διαφορετικό.

Γιατί προχωρούμε σε αφηρημένη διατύπωση: Κατά τον τελευταίο ενάμιση αιώνα, τα μαθηματικά υιοθέτησαν μια θεμελιώδη μεθοδολογική αρχή: όταν διαφορετικά αντικείμενα μοιράζονται τις ίδιες δομικές ιδιότητες, η δομή ορίζεται μία φορά και τα θεωρήματα αποδεικνύονται μία φορά. Τα διανύσματα του επιπέδου, τα πολυώνυμα, οι πίνακες και οι συναρτήσεις είναι εκ πρώτης όψεως ανόμοια αντικείμενα, υπακούουν όμως στους ίδιους

κανόνες πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Αντί, επομένως, να επαναλαμβάνουμε την ίδια απόδειξη σε κάθε περίπτωση χωριστά, απομονώνουμε τη δομή που τα ενοποιεί: κάθε αποτέλεσμα που αποδεικνύεται για έναν αφηρημένο γραμμικό χώρο ισχύει αυτομάτως σε καθένα από αυτά.

Γιατί 8 αξιώματα; Διότι θέλουμε να αποτυπώσουμε αποκλειστικά τη δομή που είναι κοινή σε όλα τα παραδείγματα που μας ενδιαφέρουν ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, πολυώνυμα, συναρτήσεις, πίνακες). Η αφαίρεση είναι σκόπιμη: δεν ορίζουμε το *διάνυσμα* ως βέλος στον χώρο, αλλά ως στοιχείο ενός συνόλου που υπακούει σε αυτούς ακριβώς τους νόμους. Τα οκτώ αξιώματα δεν αποτελούν αυθαίρετη επιλογή: είναι *οικονομικά* και *επαρκή*, με την έννοια ότι από αυτά και μόνο συνάγονται όλες οι γνωστές ιδιότητες των γραμμικών πράξεων, όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω στην Πρόταση 1.1.

▶ ANIMATION ***Πρόσθεση Διανυσμάτων – Κανόνας Παραλληλογράμμου – Διαδραστικό***

Σύρετε τα διανύσματα **u** και **v** στο επίπεδο και δείτε το άθροισμα **u** + **v** να σχηματίζεται ως διαγώνιος του παραλληλογράμμου. **Παρατηρήστε:** η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική – η ίδια διαγώνιος προκύπτει είτε ξεκινήσετε από το **u** είτε από το **v**. **Σύνδεση:** το αξίωμα $(\mathbf{A_1})$ της αντιμεταθετικότητας της πρόσθεσης στον ορισμό του γραμμικού χώρου (Ορ. 1.1).

Ο έλεγχος ότι ένα σύνολο αποτελεί γραμμικό χώρο γίνεται με άμεση επαλήθευση των οκτώ αξιωμάτων, το ένα μετά το άλλο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1 – *Επαλήθευση Αξιωμάτων σε $\mathbb{R}^2$ και $\mathcal{P}_2$*

Επαληθεύστε ότι ο $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικός χώρος ελέγχοντας και τα οκτώ αξιώματα, ότι ο $\mathcal{P}_2$ είναι γραμμικός χώρος και δώστε ένα αντιπαράδειγμα συνόλου που δεν είναι.

Λύση 1.1: **(α) $\mathbb{R}^2$ ως γραμμικός χώρος.** Ορίζουμε $V = \mathbb{R}^2$ με τις κανονικές πράξεις:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1{+}x_2,\ y_1{+}y_2), \quad \lambda \cdot (x, y) = (\lambda x,\ \lambda y).$$

Επειδή οι πράξεις γίνονται *κατά συνιστώσα* και ανάγονται στις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, ελέγχονται άμεσα και τα οκτώ αξιώματα (για $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$):

- (A_1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ και (A_2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (αντιμεταθετικότητα/προσεταιριστικότητα στο $\mathbb{R}$).
- (A_3) μηδενικό $\mathbf{0} = (0, 0)$ και (A_4) αντίθετο $-(x, y) = (-x, -y)$.
- (B_1) $1 \cdot (x, y) = (x, y)$ και (B_2) $(\lambda\mu)(x, y) = \lambda(\mu(x, y))$.
- (B_3) $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ και (B_4) $(\lambda + \mu)(x, y) = \lambda(x, y) + \mu(x, y)$.

Άρα ο $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικός χώρος.

(β) $\mathcal{P}_2$ ως γραμμικός χώρος. Έστω $\mathcal{P}_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_i \in \mathbb{R}\}$ ο χώρος πολυωνύμων βαθμού ≤ 2. Με πράξεις την κατά όρους πρόσθεση πολυωνύμων και τον πολλαπλασιασμό κάθε συντελεστή με βαθμωτό, τα οκτώ αξιώματα ανάγονται ξανά στις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών· ενδεικτικά:

- Μηδενικό: $\mathbf{0} = 0$ (μηδενικό πολυώνυμο).
- Αντίθετο: $-p = -a_0 - a_1x - a_2x^2$.

Άρα ο $\mathcal{P}_2$ είναι γραμμικός χώρος, με ακριβώς την ίδια δομή που έχει ο $\mathbb{R}^3$.

(γ) Αντιπαράδειγμα. Το $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ δεν είναι γραμμικός χώρος: $(1, 0) \in W$ αλλά $(-1) \cdot (1, 0) = (-1, 0) \notin W$. Παραβιάζεται η κλειστότητα ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό (η εξωτερική πράξη $\cdot : \mathbb{R} \times W \to W$ δεν είναι καλά ορισμένη).

■

1.2.1 Βασικές Ιδιότητες

Από τα αξιώματα προκύπτουν αμέσως μερικές χρήσιμες ιδιότητες:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1 – *Βασικές ιδιότητες γραμμικού χώρου*

Σε κάθε γραμμικό χώρο V ισχύουν:

(i) Το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$ είναι μοναδικό.

(ii) Το αντίθετο $(-\mathbf{u})$ κάθε $\mathbf{u} \in V$ είναι μοναδικό.

(iii) $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{u} \in V$.

(iv) $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(v) $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$ για κάθε $\mathbf{u} \in V$.

(vi) Αν $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{0}$, τότε $\lambda = 0$ ή $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

∴ ΑΠΟΔΕΙΞΗ *Σαρώστε για αναλυτική απόδειξη βήμα προς βήμα.*

Βλ. [4, 17, 45]

Οι ιδιότητες αυτές δεν είναι αυτονόητες: προκύπτουν από τα αξιώματα και χρησιμοποιούνται έπειτα σε κάθε υπολογισμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2 – *Εφαρμογή Βασικών Ιδιοτήτων*

(α) Αποδείξτε ότι $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ *για κάθε* $\mathbf{v} \in V$. *(β) Υπολογίστε* $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + 0 \cdot (5,1,7)$ *για* $\mathbf{u} = (1,2,-1)$, $\mathbf{v} = (3,0,2)$ *στον* $\mathbb{R}^3$.

Λύση 1.2: Τα δύο ερωτήματα δείχνουν τις δύο όψεις του ίδιου νομίσματος. Στο (α) δουλεύουμε *αφηρημένα*: δεν γνωρίζουμε τίποτα για τα στοιχεία του V παρά μόνο τα αξιώματα, οπότε η απόδειξη πρέπει να στηριχθεί αποκλειστικά σε αυτά. Στο (β) δουλεύουμε *συγκεκριμένα* στον $\mathbb{R}^3$, όπου οι πράξεις γίνονται συντεταγμένη προς συντεταγμένη.

(α) Απόδειξη ότι $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Η βασική ιδέα είναι να γράψουμε το βαθμωτό 0 ως $0 + 0$ και να αφήσουμε την επιμεριστική ιδιότητα να δουλέψει: $0 \cdot \mathbf{v} = (0+0) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v}$. Αφαιρώντας $0 \cdot \mathbf{v}$ από τις δύο πλευρές (επιτρεπτό, γιατί κάθε διάνυσμα έχει αντίθετο) μένει $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}$.
Προσέξτε τη λεπτή διάκριση που μόλις αποδείχθηκε: το 0 αριστερά είναι *αριθμός*, ενώ το $\mathbf{0}$ δεξιά είναι *διάνυσμα*. Η ταύτισή τους δεν ήταν αξίωμα, έπρεπε να αποδειχθεί.

(β) Απλοποίηση έκφρασης. Δοθέντων $\mathbf{u} = (1,2,-1)$, $\mathbf{v} = (3,0,2)$ στον $\mathbb{R}^3$, υπολογίζουμε:

$$2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + 0 \cdot (5,1,7) = 2(1,2,-1) - 3(3,0,2) + (0,0,0) = (2,4,-2) - (9,0,6) = \boxed{(-7,\ 4,\ -8)}.$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος $0 \cdot (5,1,7) = \mathbf{0}$ δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα (ιδ. (iii)).

■

Ο αξιωματικός ορισμός, αν και φαίνεται αφηρημένος, επιτρέπει να αποδείξουμε με μία μόνο διαδικασία ιδιότητες που ισχύουν ταυτόχρονα για όλα τα γραμμικά αντικείμενα. Στη συνέχεια εξετάζουμε πόσο πλούσια είναι η οικογένεια των δομών που τον ικανοποιούν.

1.3 Υπόχωροι

Κλειστότητα και δομή: Ένας υπόχωρος είναι ένα υποσύνολο ενός γραμμικού χώρου που είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του χώρου: αν πάρουμε δύο οποιαδήποτε στοιχεία του και τα προσθέσουμε ή τα πολλαπλασιάσουμε με βαθμωτό, το αποτέλεσμα παραμένει εντός του υποσυνόλου. Η έννοια αυτή είναι κεντρική διότι οι υπόχωροι εμφανίζονται παντού: ο χώρος λύσεων ενός ομογενούς συστήματος, ο χώρος εικόνας ή ο πυρήνας μιας γραμμικής απεικόνισης, το επίπεδο ή η ευθεία μέσω της αρχής στον $\mathbb{R}^3$· όλα αυτά είναι υπόχωροι. Ένα σημείο αξίζει να

τονιστεί από την αρχή: το μηδενικό διάνυσμα είναι υποχρεωτικό. Μια ευθεία ή ένα επίπεδο που δεν περνά από την αρχή δεν είναι υπόχωρος, όσο συμμετρικό κι αν φαίνεται. Στην πράξη, αντί να επαληθεύουμε και τα οκτώ αξιώματα, αρκεί να ελέγχουμε τρεις συνθήκες, το *Κριτήριο Υποχώρου* που διατυπώνεται πιο κάτω.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2 – *Υπόχωρος*

Έστω V γραμμικός χώρος. Ένα μη κενό υποσύνολο $W \subseteq V$ ονομάζεται **υπόχωρος** (subspace) του V αν το W, εφοδιασμένο με τις ίδιες πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού του V, είναι το ίδιο γραμμικός χώρος.

Οι τρεις αυτές συνθήκες καθιστούν τον έλεγχο πιο πρακτικό:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2 – *Κριτήριο Υποχώρου*

Ένα μη κενό $W \subseteq V$ είναι υπόχωρος του V αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι παρακάτω τρεις συνθήκες:

(i) $\mathbf{0} \in W$

(ii) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ (κλειστό ως προς πρόσθεση)

(iii) $\mathbf{u} \in W,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\mathbf{u} \in W$ (κλειστό ως προς βαθμωτό πολλαπλασιασμό)

∴ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ** *Σαρώστε για αναλυτική απόδειξη βήμα προς βήμα.*

Βλ. [4, 17, 45]

Δύο έννοιες που θα μας συνοδεύουν σε όλο το βιβλίο είναι ο γραμμικός συνδυασμός και ο υπόχωρος που παράγεται από ένα σύνολο διανυσμάτων:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3 – *Γραμμικός Συνδυασμός και Παραγόμενος Υπόχωρος*

Έστω $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Το διάνυσμα

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k,$$

ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** (linear combination) των $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών τους,

$$\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} = \{\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k \ :\ \lambda_i \in \mathbb{R}\},$$

ονομάζεται **παραγόμενος υπόχωρος** (span) των $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ και είναι ο μικρότερος υπόχωρος του V που τα περιέχει.

Ένα πρώτο, κεντρικό παράδειγμα υποχώρων προκύπτει από οποιονδήποτε πίνακα:
(Εδώ ο πίνακας A και το γινόμενο $A\mathbf{x}$ χρησιμοποιούνται ως εργαλεία· ο συμβολισμός συνοψίζεται στην Εργαλειοθήκη στην αρχή του κεφαλαίου, πλήρης μελέτη στο Κεφάλαιο 2.)

Με κάθε πίνακα συνδέονται άμεσα δύο υπόχωροι, που θα μας απασχολήσουν σε όλο το βιβλίο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3 – *Πυρήνας και εικόνα γραμμικής απεικόνισης*

Ορίστε τον πυρήνα και την εικόνα ενός $m \times n$ πίνακα A και δείξτε ότι είναι υπόχωροι.

Λύση 1.3: Αν $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, τότε:

$$\operatorname{Ker}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ (ο **πυρήνας** ή **μηδενόχωρος** του A), και

$$\operatorname{Im}(A) = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\},$$

είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ (η **εικόνα** ή **χώρος στηλών** του A), όπου $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ είναι οι στήλες του A.

Απόδειξη (κριτήριο υποχώρου): *Για τον* $\mathrm{Ker}(A)$*:* ισχύει $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, άρα $\mathbf{0} \in \mathrm{Ker}(A)$. Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(A)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ και $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, οπότε $\mathbf{x}+\mathbf{y},\ \lambda\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A)$. *Για την* $\mathrm{Im}(A)$*:* $\mathbf{0} = A\mathbf{0} \in \mathrm{Im}(A)$· αν $\mathbf{b}_1 = A\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{b}_2 = A\mathbf{x}_2$, τότε $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$ και $\lambda\mathbf{b}_1 = A(\lambda\mathbf{x}_1)$, άρα ανήκουν στην $\mathrm{Im}(A)$. Επομένως και τα δύο σύνολα είναι υπόχωροι.

■

1.3.1 Γεωμετρικοί Υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

Στον $\mathbb{R}^3$ οι υπόχωροι έχουν σαφή γεωμετρική εικόνα, και αυτό ακριβώς κάνει τη γεωμετρία εργαλείο κατανόησης της άλγεβρας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3 – *Γεωμετρικοί Υπόχωροι του* $\mathbb{R}^3$

Οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ είναι (Σχήμα 1.1):

(i) Ο μηδενικός υπόχωρος (τετριμμένος): $\{\mathbf{0}\}$.

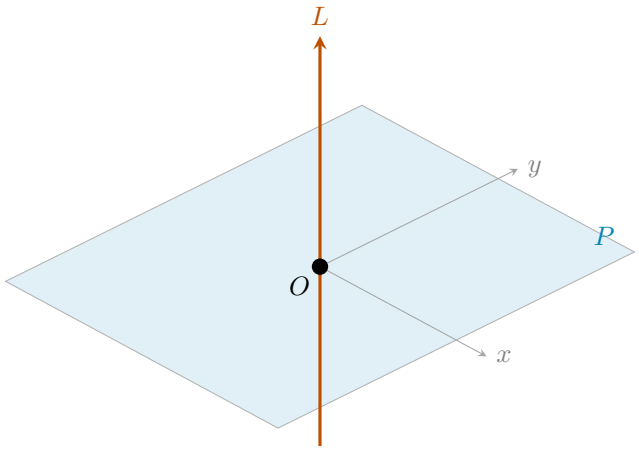
(ii) Κάθε **ευθεία** που διέρχεται από την αρχή των αξόνων: $L = \{t\,\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ για κάποιο $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

(iii) Κάθε **επίπεδο** που διέρχεται από την αρχή: $P = \{a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v} : a, b \in \mathbb{R}\}$ για γραμμικώς ανεξάρτητα $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

(iv) Ο ίδιος ο χώρος (τετριμμένος): $\mathbb{R}^3$.

∴ ΑΠΟΔΕΙΞΗ *Σαρώστε για αναλυτική απόδειξη βήμα προς βήμα.*

Βλ. [2, 25, 45]



Σχήμα 1.1 *Μη τετριμμένοι υπόχωροι του* $\mathbb{R}^3$*: ευθεία* L *(πορτοκαλί) και επίπεδο* P *(μπλε), αμφότερα διερχόμενα από την αρχή* O*.*

Σχόλιο 1.2

Ευθείες και επίπεδα που δεν διέρχονται από την αρχή των αξόνων δεν είναι υπόχωροι: το κριτήριο (i) απαιτεί $\mathbf{0} \in W$, οπότε μόνο γεωμετρικά αντικείμενα κεντραρισμένα στην αρχή μπορούν να αποτελούν υποχώρους.

Ας το δούμε σε δύο απλά υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4 – *Έλεγχος υποχώρου στον* $\mathbb{R}^3$

Εξετάζουμε αν τα παρακάτω υποσύνολα είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$*:*

(α) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$

(β) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 2\}$

Λύση 1.4: **(α)** Το $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ ικανοποιεί $2(0) - (0) + 3(0) = 0$, άρα $\mathbf{0} \in W_1$. Αν $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1$, τότε $2u_1 - u_2 + 3u_3 = 0$ και $2v_1 - v_2 + 3v_3 = 0$, άρα $2(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) + 3(u_3 + v_3) = 0$, δηλαδή $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1$. Ομοίως $\lambda\mathbf{u} \in W_1$. Άρα W_1 είναι υπόχωρος (επίπεδο μέσω O).
(β) Το $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ δεν ανήκει στο W_2 αφού $0 + 0 + 0 = 0 \neq 2$. Άρα W_2 δεν είναι υπόχωρος (επίπεδο που δεν διέρχεται από O).

■

Σχόλιο 1.3 – *Γέφυρα προς το Κεφάλαιο 4*

Ο $\mathrm{Ker}(A)$ και η $\mathrm{Im}(A)$ δεν είναι ξεχωριστές κατασκευές: είναι η ειδική περίπτωση του *πυρήνα* και της *εικόνας* μιας **γραμμικής απεικόνισης** $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Η γενική θεωρία (ορισμός της γραμμικής απεικόνισης, πίνακας αναπαράστασης, *θεώρημα βαθμού–μηδενικότητας* ($\dim \mathrm{Ker}\, T + \dim \mathrm{Im}\, T = n$), σύνθεση, ισομορφισμοί, αλλαγή βάσης) αναπτύσσεται στο Κεφάλαιο 4. Εδώ μας ενδιαφέρουν μόνο ως *παραδείγματα υποχώρων*: ο ένας βρίσκεται στον $\mathbb{R}^n$, ο άλλος στον $\mathbb{R}^m$.

1.4 Γραμμική Ανεξαρτησία

Γραμμική ανεξαρτησία (linear independence)**: η θεμελιώδης έννοια της αλγεβρικής δομής:** Τα διανύσματα ενός συνόλου είναι γραμμικώς *ανεξάρτητα* αν κανένα από αυτά δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Αυτή η ιδιότητα είναι ο ακριβής τρόπος να πούμε ότι «δεν υπάρχει πλεονάζουσα πληροφορία»: κάθε διάνυσμα του συνόλου συνεισφέρει σε διαφορετική κατεύθυνση. Στη φυσική και τη μηχανική, η γραμμική ανεξαρτησία σημαίνει ότι τα διανύσματα αντιπροσωπεύουν ανεξάρτητες κατευθύνσεις, όπως δυνάμεις που δεν μπορούν να αλληλοαναιρεθούν. Στον $\mathbb{R}^2$, δύο διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν είναι παράλληλα. Στον $\mathbb{R}^3$, τρία διανύσματα είναι εξαρτημένα αν και μόνο αν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που διέρχεται από την αρχή. Ο πιο συστηματικός έλεγχος γίνεται ελέγχοντας αν το ομογενές σύστημα $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ έχει μόνο τη μηδενική λύση, ακριβώς το κριτήριο που μας δίνει και η ορίζουσα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4 – *Γραμμική Ανεξαρτησία*

Τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ λέγονται **γραμμικώς ανεξάρτητα** (συντομογραφικά *γ.α.*) αν η εξίσωση

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

έχει μόνη λύση $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$. Αλλιώς λέγονται **γραμμικώς εξαρτημένα** (*γ.ε.*).

▶ ANIMATION ***Γραμμική Εξάρτηση και Ανεξαρτησία – Διαδραστικό***

Αλλάξτε δύο διανύσματα και δείτε πότε σχηματίζουν παραλληλόγραμμο με μη μηδενικό εμβαδόν (ανεξάρτητα) ή πέφτουν στην ίδια ευθεία (εξαρτημένα). **Παρατηρήστε:** η εξάρτηση εμφανίζεται ακριβώς όταν $\det = 0$ – δηλαδή όταν χάνεται μια διάσταση πληροφορίας. **Σύνδεση:** ορισμός γραμμικής ανεξαρτησίας (Ορ. 1.4) και το κριτήριο της ορίζουσας (Θεώρ. 1.5).

Δύο παραδείγματα δείχνουν πώς εφαρμόζεται ο ορισμός και ένα τρίτο τι σημαίνει να μην ισχύει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5 – *Γραμμική Εξάρτηση και Ανεξαρτησία*

Εξετάστε αν τα ακόλουθα σύνολα διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή εξαρτημένα: (α) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$· *(β)* $\{(1,2,3),(2,4,6)\}$· *(γ)* $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Λύση 1.5: **(α) Ανεξάρτητα:** $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$. Από $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ προκύπτει $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0,0,0)$. Άρα γραμμικώς **ανεξάρτητα**.

(β) Εξαρτημένα: $\mathbf{v}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (2,4,6)$. Τότε $2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, οπότε υπάρχουν $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1 \neq 0$. Γραμμικώς **εξαρτημένα**: το $\mathbf{v}_2$ είναι απλώς το διπλάσιο του $\mathbf{v}_1$.

(γ) Κριτήριο με πίνακα: Τα $\mathbf{v}_1 = (1,1,0), \mathbf{v}_2 = (1,0,1), \mathbf{v}_3 = (0,1,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα; Ανάγουμε τον 3×3 πίνακα που έχει αυτά ως στήλες:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Τρεις οδηγοί $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ γραμμικώς **ανεξάρτητα**.

■

1.4.1 Κριτήρια Γραμμικής Ανεξαρτησίας

Ακολουθούν τα κυριότερα κριτήρια ελέγχου γραμμικής ανεξαρτησίας, τα οποία χρησιμοποιούνται ευρέως στην πράξη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4 – *Κριτήριο για Δύο Διανύσματα*

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ είναι *γραμμικώς εξαρτημένα* αν και μόνο αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ (ή ισοδύναμα $\mathbf{v} = c'\mathbf{u}$). Γεωμετρικά στο $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα είναι *παράλληλα*.

∴ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ** *Σαρώστε για αναλυτική απόδειξη βήμα προς βήμα.*

Βλ. [2, 25, 45]

Για τρία διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ ο έλεγχος γίνεται ακόμη πιο σύντομος:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.5 – *Κριτήριο Ορίζουσας για Τρία Διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$*

Τα $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1,w_2,w_3)$ στον $\mathbb{R}^3$ είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα** αν και μόνο αν:

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \neq 0.$$

∴ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ** *Σαρώστε για αναλυτική απόδειξη βήμα προς βήμα.*

Βλ. [2, 45]

Δείχνουμε το κριτήριο στην πράξη:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.6 – *Έλεγχος με ορίζουσα*

Ελέγχουμε αν $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 5, 6)$, $\mathbf{w} = (7, 8, 10)$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον* $\mathbb{R}^3$.

Λύση 1.6: Έχουμε ακριβώς τρία διανύσματα σε τρισδιάστατο χώρο, την ιδανική περίπτωση για το κριτήριο της ορίζουσας. Τοποθετούμε τα διανύσματα ως στήλες ενός 3×3 πίνακα: αν η ορίζουσα είναι μη μηδενική, ο πίνακας αντιστρέφεται, η μόνη λύση της $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$ είναι η τετριμμένη και τα διανύσματα είναι ανεξάρτητα.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix} = 1(50 - 48) - 4(20 - 24) + 7(12 - 15) = 2 + 16 - 21 = -3 \neq 0.$$

Η ορίζουσα βγήκε $-3 \neq 0$, άρα τα τρία διανύσματα είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα**. Ως τρία ανεξάρτητα διανύσματα σε χώρο διάστασης 3, αποτελούν, μάλιστα, και *βάση* του $\mathbb{R}^3$.
Γεωμετρικά, η ορίζουσα είναι ο (προσημασμένος) όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα τρία διανύσματα: μη μηδενικός όγκος σημαίνει ότι δεν βρίσκονται σε κοινό επίπεδο.

■

Η υπολογιστική υλοποίηση της μεθόδου γίνεται με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού:

∫ CAS 1.1 – *Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας στο Maxima*

Δίνονται δύο πίνακες. Ο πρώτος A *περιέχει τρία διανύσματα ως στήλες:* $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3)^T$, $\mathbf{a}_2 = (4, 5, 6)^T$, $\mathbf{a}_3 = (7, 8, 10)^T$. *Υπολογίστε την ορίζουσά του για να ελέγξετε αν τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Για τον δεύτερο πίνακα* B *με στήλες* $\mathbf{b}_1 = (1, 0, 2)^T$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, -1)^T$, $\mathbf{b}_3 = (2, 3, 1)^T$, *υπολογίστε τον πυρήνα ο οποίος δείχνει τις σχέσεις γραμμικής εξάρτησης.*

```
/* Πρώτος πίνακας A: ανεξάρτητα διανύσματα */
A: matrix([1, 4, 7],
 [2, 5, 8],
 [3, 6, 10]);

/* Υπολογισμός ορίζουσας A */
determinant(A); /* -3 ≠ 0 => διανύσματα γ.α. */

/* Δεύτερος πίνακας B: εξαρτημένα διανύσματα */
B: matrix([1, 0, 2],
 [0, 1, 3],
 [2, -1, 1]);

/* Ορίζουσα του B */
determinant(B); /* 0 => διανύσματα γ.ε. */

/* Πυρήνας: γραμμικές σχέσεις εξάρτησης */
nullspace(B); /* Δίνει τη βάση του πυρήνα */
```

Εξήγηση: Η ορίζουσα του πίνακα A είναι -3 (μη μηδενική), άρα οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και σχηματίζουν βάση του $\mathbb{R}^3$. Η ορίζουσα του B είναι 0, δηλώνοντας ότι υπάρχει μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των στηλών που δίνει το μηδέν. Ο πυρήνας δίνει τους ακριβείς συντελεστές αυτής της σχέσης εξάρτησης.

Το ίδιο πρόβλημα αντιμετωπίζεται αποτελεσματικά και με άλλα υπολογιστικά εργαλεία:

π PYTHON 1.1 – *Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας με Python*

Χρησιμοποιήστε NumPy για να ελέγξετε γραμμική ανεξαρτησία μέσω ορίζουσας και πυρήνα.

```
import numpy as np

v1 = np.array([1, 2, 3])
v2 = np.array([4, 5, 6])
v3 = np.array([7, 8, 10])

M    = np.array([v1, v2, v3])
rank = np.linalg.matrix_rank(M)
print(f"Κατάταξη πίνακα: {rank}")
print("Γραμμικά ανεξάρτητα:", rank == 3)    # True → ανεξάρτητα
# --> Πλήρης κώδικας με γραφικές παραστάσεις: βλ. Παράρτημα Β
```

Η υπολογιστική διαδικασία φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.7 – *Εξαρτημένο σύνολο – εύρεση σχέσης εξάρτησης*

Εξετάζουμε τα $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 3)$, $\mathbf{w} = (2, -1, 1)$ *στον* $\mathbb{R}^3$.

Λύση 1.7: Η ερώτηση έχει δύο επίπεδα. Το πρώτο, «είναι εξαρτημένα;», απαντιέται με μια ορίζουσα. Το δεύτερο, «πώς εξαρτώνται;», απαιτεί να βρούμε τους συντελεστές της σχέσης, και αυτό είναι πια πρόβλημα επίλυσης ομογενούς συστήματος.
Ξεκινάμε με την ορίζουσα του πίνακα που έχει τα τρία διανύσματα ως στήλες:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 1(1+3) - 0 + 2(0-2) = 4 - 4 = 0.$$

Η ορίζουσα μηδενίζεται, άρα τα διανύσματα είναι **γραμμικώς εξαρτημένα**. Αυτό, όμως, μας λέει μόνο ότι υπάρχει μη τετριμμένη σχέση, όχι ποια είναι. Για να τη βρούμε, λύνουμε το ομογενές σύστημα $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$ με απαλοιφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Από τη 2η γραμμή: $b = c$. Από την 1η: $a = -2c$. Θέτοντας $c = 1$: $a = -2,\ b = 1$, οπότε

$$-2\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}}.$$

Επαλήθευση: $2(1,0,2) - (0,1,3) = (2,0,4) - (0,1,3) = (2,-1,1) = \mathbf{w}$.
Η σχέση επαληθεύεται. Βρήκαμε, λοιπόν, όχι μόνο ότι τα διανύσματα είναι εξαρτημένα αλλά και πώς: το $\mathbf{w}$ βρίσκεται ήδη μέσα στο επίπεδο που παράγουν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, οπότε δεν προσθέτει καμία νέα κατεύθυνση. Το $\text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ είναι επίπεδο, όχι ολόκληρος ο $\mathbb{R}^3$.

■

Το παραπάνω παράδειγμα αναδεικνύει μια γενικότερη ιδιότητα που αξίζει να διατυπωθεί επίσημα:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.6 – *Κριτήριο γραμμικής εξάρτησης μέσω γραμμικού συνδυασμού*

Τα $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ με $k \geq 2$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν τουλάχιστον ένα από αυτά εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.