

# Μέρος 1<sup>ο</sup>

## Η Επιστήμη Συστημάτων και οι Βασικές Αρχές της Θεωρίας της Πολυπλοκότητας με Εφαρμογές στη Φυσική, στη Βιολογία, στη Διοικητική Επιστήμη, και στην Πολιτική Οικονομία

Νικόλαος Κ. Λάος<sup>4</sup>

*Μαθηματικός και Φιλόσοφος της Επιστήμης*

*Ειδικευμένος στην Επιστήμη Συστημάτων και στη Μαθηματική Μοντελοποίηση, FRSA (UK), Partner της ιδιωτικής εταιρείας πληροφοριών και αναλύσεων R-Techno Ltd, Διδάσκων σε προπτυχιακά και σε μεταπτυχιακά προγράμματα σπουδών του London Metropolitan University/C.U.C. και του Cardiff Metropolitan University*

### Περίληψη

Η εφαρμογή της γενικής θεωρίας συστημάτων στην επιστημονική έρευνα ονομάζεται «επιστήμη συστημάτων». Η γενική θεωρία συστημάτων είναι μια τυπική θεωρία (formal theory), υπό την έννοια ότι, όπως και οι άλλες τυπικές θεωρίες (π.χ., τα μαθηματικά), είναι ανεξάρτητη από εξωτερικές αναφορές σε οποιοδήποτε ειδικό θέμα (αντικείμενο επιστήμης), και, άρα, βασίζεται στη δική της εσωτερική λογική.

---

<sup>4</sup> Το περιεχόμενο αυτού του μέρους του παρόντος βιβλίου αποτελεί τις διδακτικές σημειώσεις μου με βάση τις οποίες έχω διδάξει και εφαρμόσει την επιστήμη συστημάτων και τη θεωρία της πολυπλοκότητας στο πλαίσιο επιστημονικών εργασιών μου στη ρωσική ιδιωτική εταιρεία πληροφοριών και αναλύσεων R-Techno Ltd (Μόσχα). Η αρχική δημοσίευση μιας εκδοχής της παρούσας εργασίας μου έγινε από εμένα στην αγγλική γλώσσα στο πλαίσιο ειδικών μελετών που συντάξα για την R-Techno Ltd (διατηρώντας εγώ το copyright της διεθνούς αγγλικής έκδοσης). Για τη σύνταξη της παρούσας εργασίας μου, αξιοποίησα και μέρος του διδακτικού υλικού που συνέγραψα ως διδάσκων σε προγράμματα σπουδών του London Metropolitan University και του Cardiff Metropolitan University.

Κατά συνέπεια, αν αυτή η λογική είναι συνεπής, τότε λειτουργεί, ενώ, αν υπάρχουν λογικές ασυνέπειες (αντιφάσεις), τότε δεν λειτουργεί, όπως ισχύει για κάθε τυπική θεωρία/γλώσσα. Ενώ ο όρος «επιστήμη», σύμφωνα με τον γενικότερο ορισμό του, μπορεί να είναι εστιασμένος σε τυπικές θεωρίες/γλώσσες, αναφέρεται επίσης στην εμπειρία, δηλαδή συχνά εξαρτάται από την αναφορά σε κάποιο ειδικό θέμα, το οποίο συναρτάται με την επικύρωση της παραγόμενης επιστημονικής γνώσης, και, γι' αυτόν τον λόγο, οι περισσότεροι επιστήμονες ασχολούνται εκτενώς με τη συλλογή και την ανάλυση εμπειρικών δεδομένων. Οι τυπικές θεωρίες/γλώσσες είναι ανεξάρτητες από την αναφορά στην εμπειρία (δηλαδή διαφέρουν με έναν ουσιαστικό τρόπο από την εμπειρική επιστήμη), και στηρίζουν την ανάπτυξη της επιστήμης με έναν λογικά αυστηρό τρόπο. Τα μαθηματικά, συγκεκριμένα, αποτελούν τον «χρυσό κανόνα» για την επιστημονική επικύρωση της γνώσης, και, ιδιαίτερος από τον 20ό αιώνα και μετά, η θεωρία συνόλων έχει αναγνωριστεί ως ο κυρίαρχος τρόπος θεμελίωσης των μαθηματικών.

Η ιστορία της σύγχρονης επιστήμης καταδεικνύει τα εξής: Πρώτον, ο συνδυασμός της θεωρίας συνόλων και του αναγωγισμού (δηλαδή της αναγωγής όλων των όντων και της πραγματικότητας, γενικώς, σε μια απλή αλληλεπίδραση μεταξύ φυσικών συνιστωσών) έχει αποδειχθεί επιτυχής στην περιγραφή απλών ντετερμινιστικών συστημάτων στο πλαίσιο των φυσικών επιστημών, ενώ άλλα επιστημονικά πεδία—όπως η εξελικτική βιολογία και ιδιαίτερος οι κοινωνικές επιστήμες, που ασχολούνται με μη-ντετερμινιστικά, εντόνως διασυνδεδεμένα, και αναδυόμενα συστήματα—είτε προσπαθούν να μιμηθούν μηχανιστικά μοντέλα των φυσικών επιστημών είτε περιορίζονται σε μια ισχνή τυπική θεμελίωση.<sup>5</sup> Δεύτερον, ένα βασικό χαρακτηριστικό του τρόπου με τον οποίο αναπτύχθηκε η σύγχρονη επιστήμη υπό την επίδραση του αναγωγισμού είναι η διασπασμένη φύση της, υπό την έννοια ότι η σύγχρονη επιστήμη οργανώθηκε ως μια εντόνως εξειδικευμένη και τμηματοποιημένη δραστηριότητα. Η εξειδίκευση δεν είναι κατ' αρχήν κακή, αλλά, όταν η γνώση και η εμπειρογνώση του ενός επιστημονικού πεδίου είναι πολύ αποσυνδεδεμένες από

---

<sup>5</sup> Ένα σύστημα ονομάζεται «ντετερμινιστικό» (deterministic) αν η συμπεριφορά του είναι πλήρως προβλέψιμη, υπό την έννοια ότι: πρώτον, δεδομένων της ίδιας εισροής και των ίδιων αρχικών συνθηκών, παράγει πάντοτε το ίδιο αποτέλεσμα, και, δεύτερον, δεν υπάρχει τυχαιότητα (όλα κυβερνώνται από αυστηρούς κανόνες). Ένα σύστημα ονομάζεται «μη-ντετερμινιστικό» (non-deterministic) αν η συμπεριφορά του δεν είναι πλήρως προβλέψιμη, ακόμα και με την ίδια εισροή, υπό την έννοια ότι μπορεί να παράγει διαφορετικά αποτελέσματα καθεμιά φορά, ή μπορεί να υπάρχουν πολλαπλοί δυνατοί δρόμοι που μπορεί να ακολουθήσει. Ο μη-ντετερμινισμός μπορεί να προέλθει από τυχαιότητα, αβεβαιότητα, ή πολλαπλές επιλογές στο σύστημα.

τη γνώση και την εμπειρογνωσία του άλλου, τότε η επιστήμη ως ένα «σώμα γνώσης» μπορεί να αποβεί υπερβολικώς εστιασμένη στα «δένδρα» χωρίς να βλέπει το «δάσος».

Η επιστήμη αποτελεί μια κοινωνική δραστηριότητα, δηλαδή εκτελεί μια κοινωνική λειτουργία, και, τελικώς, η κοινωνία χρειάζεται απαντήσεις, όχι μόνο σε ειδικές αναλυτικές ερωτήσεις, αλλά και σε μεγαλύτερες ερωτήσεις, που αφορούν, για παράδειγμα, στη φύση της τάξης και του χάους στο σύμπαν μας, ή στο πώς τα διαφορετικά πεδία γνώσης σχετίζονται μεταξύ τους και μπορούν να μας οδηγήσουν σε μια κατανόηση της πραγματικότητας ως τέτοιας. Ο αναγωγισμός μάς προσφέρει πολύ λίγα μέσα για να απαντήσουμε σε τέτοιες, μεγαλύτερες ερωτήσεις· και, αν η επιστήμη δεν μπορεί, ή φαίνεται να μην μπορεί λόγω του τρόπου με τον οποίο είναι οργανωμένη, να εφοδιάσει την κοινωνία με βάσιμες απαντήσεις, τότε πολλοί άνθρωποι μπορεί να αναζητήσουν τέτοιες απαντήσεις αλλού (π.χ., στη δεισιδαιμονία, στον μυστικισμό, στον λαϊκισμό, στον αποδομισμό, κ.ο.κ.), και τότε η επιστήμη θα αποτύγχανε να μας προσφέρει μια ολοκληρωμένη εικόνα του τρόπου λειτουργίας του κόσμου, και όχι μόνο μια μονόπλευρη εικόνα που ανάγει τα πάντα σε μια απλή αλληλεπίδραση μεταξύ φυσικών συνιστωσών. Εδώ υπεισέρχεται η επιστήμη συστημάτων, η οποία χαρακτηρίζεται από μια ολιστική θεώρηση της πραγματικότητας, έχει μια ιδιαίτερη ικανότητα να μελετάει την πολυπλοκότητα, και μας δίδει τη δυνατότητα να εστιάσουμε, όχι τόσο στην εξειδικευμένη γνώση των επιμέρους επιστημονικών πεδίων, όσο στο πώς αυτά τα πεδία ταιριάζουν και αλληλοσυμπληρώνονται μεταξύ τους στο πλαίσιο διάφορων επιπέδων ολοκλήρωσης (integrative levels). Εξού και η επιστήμη συστημάτων είναι μια διεπιστημονική μορφή επιστήμης, και η προσφυγή σε αυτή καθίσταται αναπόφευκτη ιδιαίτερος όταν ασχολούμαστε με προβλήματα που διασχίζουν διαφορετικά επιστημονικά πεδία.

Στην παρούσα εργασία μου, που αποτελεί το Πρώτο Μέρος του παρόντος βιβλίου, θα εξηγήσω, βήμα-βήμα και πλήρως τις βασικές αρχές της επιστήμης συστημάτων και της θεωρίας της πολυπλοκότητας, τις διασυνδέσεις τους με τη φιλοσοφία, τα μαθηματικά, τις φυσικές επιστήμες, και τις κοινωνικές επιστήμες, καθώς και ειδικά θέματα μαθηματικής μοντελοποίησης στο πλαίσιο της επιστήμης συστημάτων και της θεωρίας της πολυπλοκότητας. Τελικώς, σύμφωνα με τη στρατηγική της εργασίας μου, θα προκύψει ένας γενικός τρόπος παραγωγής επιστημονικής γνώσης τόσο στο πλαίσιο των φυσικών επιστημών όσο και στο πλαίσιο των κοινωνικών επιστημών, καθώς και μια γενική θεωρία κοινωνικής οργάνωσης.

## 1.1 Η Επιστημονική Μελέτη της Πραγματικότητας και οι Έννοιες του Συστήματος και της Πολυπλοκότητας: Αλγεβρικές και Αναλυτικές Προοπτικές

Η οντολογία είναι ένας κλάδος της φιλοσοφίας, αλλά και της επιστήμης των πληροφοριών (information science), και, συγκεκριμένα, μελετάει τη φύση της ύπαρξης, του όντος, και της πραγματικότητας, ταυτοποιώντας το τι υπάρχει, τους τρόπους ύπαρξης του όντος, τους διαφορετικούς τύπους οντοτήτων (δηλαδή τις διαφορετικές κατηγορίες οντοτήτων που έχουν την ίδια δομή), και τις σχέσεις μεταξύ διαφορετικών τύπων οντοτήτων (βλ. Θεοδωρακόπουλος, 2006). Επιπλέον, στην επιστήμη των πληροφοριών, ειδικώς, μια οντολογία είναι ένας τυπικός καθορισμός μιας εννοιολόγησης (conceptualization), ή μια δομημένη αναπαράσταση γνώσης.

Με τον όρο «ον», εννοούμε μια αυτάρκη πραγματικότητα η οποία εξασφαλίζει τη διάρκειά της είτε με στατικό τρόπο, δηλαδή, παραμένοντας κλεισμένη στον εαυτό της, είτε με δυναμικό τρόπο, δηλαδή υπερβαίνοντας τη φύση της προκειμένου να επεκταθεί πέρα από τα κανονικά της όρια και να επικοινωνήσει, με τον έναν ή με τον άλλον τρόπο, με άλλα όντα (βλ. Θεοδωρακόπουλος, 2006). Με τον όρο «είναι», αναφερόμαστε, ειδικότερα, στην οντολογική κατάσταση των όντων ή των πραγμάτων, στον βαθμό τού είναι τους (βλ. Θεοδωρακόπουλος, 2006). Εξετάζοντας ένα ον (ως ένα σύστημα ποιοτήτων τις οποίες η συνείδηση μπορεί να ταυτοποιήσει και να αποδώσει σε αυτό) ως προς τον βαθμό που είναι, διαπιστώνουμε ότι: μπορεί να είναι εντελώς (οπότε ομιλούμε περί ενός «όντως όντος»), μπορεί να μην είναι καθόλου (οπότε ομιλούμε περί ενός «όντως μη όντος»), ή μπορεί να είναι εν μέρει (δηλαδή σε μια ενδιάμεση οντολογική βαθμίδα μεταξύ του «όντως όντος» και του «όντως μη όντος»).

Σύμφωνα με το σύγγραμμα του Αριστοτέλη με τίτλο *Μετά τα Φυσικά* και σύμφωνα με οντολογικά συγγράμματα των διαδόχων του, το ον υπάρχει με τους εξής τρόπους: **(i)** Κατά την ουσία του, δηλαδή το υλικό από το οποίο συνίσταται («υλικό αίτιο»). **(ii)** Κατά το είδος του, δηλαδή τη μορφή που προσλαμβάνει η ουσία του («μορφικό αίτιο»)· και, έτσι, μπορούμε να καθορίσουμε και να αντιληφθούμε ακόμα εντονότερα και σαφέστερα την υπαρξιακή ιδιαιτερότητά του, τις λειτουργίες του, και τις διαφορές του από άλλα όντα (για παράδειγμα, λόγω της μορφής του, μπορούμε να ταυτοποιήσουμε ένα μπρούτζινο άγαλμα και να αντιληφθούμε ότι πρόκειται για ένα μπρούτζινο άγαλμα, και όχι, λ.χ., για ένα μπρούτζινο πιάτο). **(iii)** Κατά το ποιητικό του αίτιο, που αναφέρεται στο γεγονός στο οποίο οφείλεται το ον. **(iv)** Κατά το τελικό του αίτιο, που αναφέρεται στο γεγονός στο οποίο αποσκοπεί η ύπαρξη του όντος. **(v)** Κατά τη δομή του, δηλαδή τη σχέση και τον σύνδεσμο μεταξύ

της ουσίας και της μορφής του όντος, καθώς ο δομικός τρόπος τού είναι αναφέρεται σε μια εσώτατη πραγματικότητα του όντος η οποία καθορίζει την οργάνωση των εσωτερικών και των εξωτερικών χαρακτηριστικών του όντος (δηλαδή καθορίζει τη διάταξη τόσο των στοιχείων της ουσίας όσο και των στοιχείων της μορφής καθώς και τη διαμόρφωση των μεταξύ τους σχέσεων). **(vi)** Κατά τη διάκριση μεταξύ του «είναι δυνάμει» και του «είναι ενεργεία»: το «είναι δυνάμει» σημαίνει οποιαδήποτε κατάσταση ενός όντος που δεν έχει ακόμα ολοκληρώσει το πρόγραμμα ύπαρξής του (ατελώς πραγματωμένο ον), ενώ το «είναι ενεργεία» σημαίνει την κατάσταση ενός όντος του οποίου το πρόγραμμα ύπαρξης έχει ολοκληρωθεί εντελώς (εντελώς πραγματωμένο ον). **(vii)** Κατά τον χρόνο του. **(viii)** Κατά τον χώρο του. **(ix)** Κατά την παθητικότητά του. **(x)** Κατά την ενεργητικότητά του.

Η παρούσα μελέτη ασχολείται με την οντολογία ως οντολογία συστημάτων, και βασίζεται στη θεωρία συνόλων. Για μια συστηματική μελέτη των βασικών αρχών, των προεκτάσεων, και των εφαρμογών της θεωρίας συνόλων, παραπέμπω στα βιβλία μου *Εισαγωγή στα Καθαρά και στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και στην Επιστημολογία* (Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, 2025) και *Συναρτησιακή Ανάλυση: Μια Βασική Εννοιολογική Μελέτη* (Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, 2025). Στο παρόν βιβλίο, ο όρος «σύνολο» γίνεται κατανοητός με τον συνήθη τρόπο—δηλαδή: ένα «σύνολο» είναι μια καλώς-ορισμένη συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων που θεωρούνται ως μια ενιαία οντότητα, όπου αυτά τα αντικείμενα ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου, και η προϋπόθεση ότι η συλλογή είναι «καλώς-ορισμένη» σημαίνει ότι δεν πρέπει να υπάρχει αμφιβολία για το αν ένα συγκεκριμένο αντικείμενο ανήκει στο σύνολο ή όχι (για παράδειγμα, δεν μπορούμε να έχουμε ένα «σύνολο όλων των ψηλών ανθρώπων» αν δεν έχουμε έναν πολύ ακριβή ορισμό του «ψηλού», προκειμένου να μπορούμε να αποφανθούμε αν ένας συγκεκριμένος άνθρωπος ανήκει σε αυτό το σύνολο ή όχι).

Τα αξιώματα στα οποία βασίζεται η θεωρία συνόλων τυποποιήθηκαν πρωτίστως από τον Γερμανό θεωρητικό της λογικής και μαθηματικό Ernst Zermelo (1871–1953), και η εργασία του συμπληρώθηκε με κάποιες ειδικές παρατηρήσεις από τους μαθηματικούς Abraham Fraenkel και John von Neumann. Έτσι, τελικώς, το κύριο σύστημα αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων αποτελείται από τα ακόλουθα εννέα αξιώματα:

**1. Αξίωμα της Επεκτασιμότητας:** Δύο σύνολα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία:

$$\forall A \ \& \ \forall B, (\forall x, (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B).$$

2. **Αξίωμα του Κενού Συνόλου:** Υπάρχει ένα σύνολο ( $\emptyset$ ) που δεν έχει στοιχεία (το κενό σύνολο):

$$\exists A | \forall x, (x \notin A).$$

3. **Αξίωμα του Ζευγισμού:** Για οποιαδήποτε δύο σύνολα, υπάρχει ένα σύνολο που περιέχει ακριβώς εκείνα τα δύο σύνολα:

$$\forall A \& \forall B, \exists C | \forall x, (x \in C \leftrightarrow x = A \text{ ή } x = B).$$

4. **Αξίωμα της Ένωσης:** Για οποιοδήποτε σύνολο συνόλων, υπάρχει ένα σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία των συνόλων εντός αυτού:

$$\forall A, \exists B | \forall x, (x \in B \leftrightarrow \exists C | (x \in C \& C \in A)).$$

5. **Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου:** Για οποιοδήποτε σύνολο, υπάρχει ένα σύνολο όλων των υποσυνόλων του (το δυναμοσύνολο):

$$\forall A, \exists B | \forall C, (C \in B \leftrightarrow C \subseteq A).$$

6. **Αξίωμα του Απείρου:** Υπάρχει ένα άπειρο σύνολο (με βάση το οποίο συνήθως κατασκευάζουμε τους φυσικούς αριθμούς):

$$\exists A | (\emptyset \in A \& \forall x, (x \in A \rightarrow x \cup \{x\} \in A)),$$

όπου η έκφραση  $x \cup \{x\}$  είναι ο «διάδοχος» του  $x$ .

7. **Αξίωμα της Αντικατάστασης:** Η εικόνα οποιοδήποτε συνόλου υπό οποιαδήποτε ορισμένη απεικόνιση είναι επίσης ένα σύνολο:

$$\text{το } \{F(x) | x \in A\} \text{ είναι ένα σύνολο}$$

για οποιαδήποτε ορισμένη απεικόνιση  $F$  και για οποιοδήποτε σύνολο  $A$  (όπου, με τον όρο «απεικόνιση», εννοούμε έναν κανόνα που αντιστοιχίζει σε καθένα στοιχείο ενός συνόλου ένα και μόνο ένα στοιχείο ενός άλλου συνόλου).

8. **Αξίωμα της Θεμελίωσης (ή της Κανονικότητας):** Κάθε μη-κενό σύνολο  $A$  περιέχει ένα στοιχείο που είναι ξένο προς (ή, με άλλα λόγια, αποσυνδεδετό από) το  $A$ :

$$\forall A, (A \neq \emptyset \rightarrow \exists x | (x \in A \& x \cap A = \emptyset)).$$

Ο συνδυασμός του αξιώματος της θεμελίωσης και του αξιώματος του ζευγισμού συνεπάγεται ότι κανένα μη-κενό σύνολο δεν αποτελεί στοιχείο του εαυτού του. Με άλλα λόγια, το αξίωμα της θεμελίωσης διασφαλίζει ότι τα σύνολα δημιουργούνται με έναν καλώς-δομημένο, αυστηρώς ιεραρχικό τρόπο, χωρίς βρόχους ή αυτο-περιεχόμενα σύνολα (και, έτσι, αποτρέπονται παράδοξες καταστάσεις).

**9. Αξίωμα της Επιλογής:** Για οποιοδήποτε σύνολο μη-κενών, ανά δύο αποσυνδεδετών (ξένων) συνόλων, υπάρχει ένα σύνολο («σύνολο επιλογής») που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από το καθένα. Με άλλα λόγια, κάθε σύνολο μπορεί να γίνει καλώς-διατεταγμένο. Ένα σύνολο ονομάζεται «καλώς-διατεταγμένο» αν είναι πλήρως διατεταγμένο (δηλαδή οποιαδήποτε δύο στοιχεία του είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους σύμφωνα με μια σχέση διάταξης, όπως «μεγαλύτερο από»), και αν κάθε μη-κενό υποσύνολο εκείνου του συνόλου έχει ένα «ελάχιστο στοιχείο» (π.χ., ένα στοιχείο  $m$  που είναι μικρότερο από ή ίσο με οποιοδήποτε άλλο στοιχείο εκείνου του υποσυνόλου).

Η έννοια ενός συνόλου έχει οδηγήσει σε έναν μαθηματικώς αυστηρό ορισμό της έννοιας μιας συνάρτησης, η οποία διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στα μαθηματικά. Το 1939, αξιοποιώντας και συνθέτοντας την κατανόηση μια συνάρτησης ως μιας σχέσης από τον Leibniz, την κατανόηση μιας συνάρτησης ως μιας αντιστοιχίας από τον Dirichlet, και την κατανόηση μιας συνάρτησης ως μιας απεικόνισης μεταξύ συνόλων από τον Dedekind, η ομάδα μαθηματικών Bourbaki έδωσε τον ακόλουθο ορισμό μιας συνάρτησης (βλ. Bottazzini, 1986, σελ. 7): Αν το  $E$  και το  $F$  είναι δύο σύνολα (τα οποία μπορεί να είναι ή να μην είναι διαφορετικά μεταξύ τους), μια σχέση μεταξύ ενός μεταβλητού στοιχείου  $x \in E$  και ενός μεταβλητού στοιχείου  $y \in F$  ονομάζεται «συναρτησιακή σχέση» στο  $y$ , αν, για κάθε  $x \in E$ , υπάρχει ένα μοναδικό  $y \in F$  το οποίο βρίσκεται στη δεδομένη σχέση με το  $x$ . Ειδικότερα, ο όρος «συνάρτηση» είναι το όνομα αυτής της πράξης, η οποία συνδέει με κάθε στοιχείο  $x \in E$  το στοιχείο  $y \in F$  το οποίο βρίσκεται στη δεδομένη σχέση με το  $x$ , και τότε λέμε ότι το  $y$  είναι η «τιμή» της συνάρτησης στο σημείο  $x$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο, οι Bourbaki οδηγήθηκαν στον ορισμό μιας συνάρτησης ως ενός συγκεκριμένου υποσυνόλου του καρτεσιανού γινομένου  $E \times F = \{(x, y) | x \in E \ \& \ y \in F\}$  και, άρα, ως ενός συνόλου διατεταγμένων ζευγών. Ειδικότερα, μια συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα αν και μόνο αν κάθε τιμή  $x$  στο πεδίο ορισμού αντιστοιχίζεται σε μια διαφορετική τιμή  $y$ , έτσι ώστε δεν υπάρχουν δύο διατεταγμένα ζεύγη που να έχουν το ίδιο δεύτερο μέλος· και μια συνάρτηση είναι επί αν και μόνο αν το πεδίο τιμών της είναι ολόκληρο το πεδίο άφιξης της (δηλαδή ολόκληρο το σύνολο των δυνατών εκροών της, που σημαίνει ότι δεν μένει κανένα στοιχείο στο πεδίο άφιξης χωρίς να σχετίζεται με κάποιο στοιχείο του πεδίου ορισμού μέσω αυτής της συνάρτησης).

Ένα «σύστημα» (system) είναι ένα σύνολο μελών ή μερών, που ονομάζονται «στοιχεία», εφοδιασμένο με μια δομή, δηλαδή με ένα σύνολο συνδέσεων μεταξύ αυτών των οντοτήτων, και αυτές οι συνδέσεις ονομάζονται «σχέσεις». Μια συλλογή στοιχείων μπορεί να είναι διατεταγμένη (ordered) ή μη-διατεταγμένη (unordered).

Μια μη-διατεταγμένη συλλογή στοιχείων είναι απλώς ένα σύνολο πραγμάτων. Επειδή δεν υπάρχει μια συγκεκριμένη δομή, ή οργάνωση, μπορούμε να περιγράψουμε ένα σύνολο καταλογογραφώντας απλώς όλα τα στοιχεία του και τις ιδιότητές τους. Για παράδειγμα, ένας σωρός από πέτρες στο έδαφος αποτελεί ένα μη-διατεταγμένο σύνολο, και, καθώς δεν υπάρχει μοτίβο (επαναλαμβανόμενο δομοστοιχείο) σε αυτή τη συλλογή πραγμάτων, μπορούμε να την περιγράψουμε με το να περιγράψουμε τις ατομικές ιδιότητες καθενός στοιχείου του δεδομένου συνόλου και ύστερα να αθροίσουμε αυτά τα στοιχεία. Τότε το σύνολο είναι απλώς το άθροισμα των μερών του. Αν, αντιθέτως, αυτά τα αντικείμενα είναι διατεταγμένα με έναν συγκεκριμένο τρόπο, δηλαδή είναι οργανωμένα, τότε συνεργάζονται μεταξύ τους σε ολικό επίπεδο, και, καθώς αυτά τα μέρη λειτουργούν μαζί, αναδύεται ένα ολικό οργανωσιακό σχήμα, ένα ολικό μοτίβο οργάνωσης, που λειτουργεί ως ένα συνεκτικό όλον. Για παράδειγμα, αν όλα τα συστατικά μέρη ενός αυτοκινήτου είναι οργανωμένα με έναν συγκεκριμένο τρόπο, τότε προκύπτει η ολική λειτουργικότητα ενός μεταφορικού μέσου· και, από τη συγκεκριμένη διάταξη τρισεκατομμυρίων κυττάρων στα διάφορα εξειδικευμένα όργανα που απαρτίζουν το ανθρώπινο σώμα, αναδύεται ένα ολικό σύστημα που μας δίδει τη δυνατότητα να λειτουργούμε ως ένας ολοκληρωμένος οργανισμός.

Η θεωρία της πολυπλοκότητας (complexity theory) προέκυψε από την ανάπτυξη της επιστήμης συστημάτων (systems science), προκειμένου να μελετήσει, ειδικώς, πολύπλοκα συστήματα. Ένα πολύπλοκο σύστημα (complex system) αναφέρεται συχνά ως ένα όλον που είναι κάτι περισσότερο από το άθροισμα των μερών του (λόγω της δράσης δομικών δυνάμεων), και του οποίου η συμπεριφορά δεν μπορεί να γίνει κατανοητή αν δεν εξετάσουμε τις ατομικές συνιστώσες (συστημικά στοιχεία) και τον τρόπο που αλληλεπιδρούν τόσο μεταξύ τους όσο και με το περιβάλλον του συστήματος. Σε ένα πολύπλοκο σύστημα, υπάρχει μια αμφίδρομη μη-διαχωρισιμότητα μεταξύ των ταυτοτήτων των συστατικών μερών του συστήματος και της ταυτότητας του συστήματος ως όλου, δηλαδή η ταυτότητα των συστατικών μερών διαμορφώνει την ταυτότητα του συστήματος και αντιστρόφως, λόγω των αλληλεπιδράσεών τους (βλ. Estrada, 2024).

Η πολυπλοκότητα συνδέεται με τα ίδια τα θεμέλια των μαθηματικών. Η θεωρία συνόλων—ιδιαίτερος η θεωρία συνόλων των Zermelo και Fraenkel—θεωρείται γενικώς ως η πρωταρχική θεμελίωση των σύγχρονων μαθηματικών. Η θεωρία συνόλων είναι το καθιερωμένο τυπικό θεμέλιο των μαθηματικών. Τα περισσότερα μαθηματικά αντικείμενα (αριθμοί, συναρτήσεις, χώροι, κ.λπ.) ορίζονται τυπικώς ως σύνολα. Το κυρίαρχο συνολοθεωρητικό σύστημα που χρησιμοποιείται είναι η θεωρία συνόλων των Zermelo–Fraenkel με το αξίωμα της επιλογής (Axiom of Choice), και

συμβολίζεται με το αρκτικόλεξο ZFC. Πρακτικώς, όλα τα κλασικά μαθηματικά μπορούν να τυποποιηθούν στο πλαίσιο του συστήματος ZFC. Ωστόσο, η μαθηματική λογική παρέχει τα εργαλεία για τη μελέτη και την κατανόηση θεμελιωδών συστημάτων όπως η θεωρία συνόλων (ZFC), καθώς η λογική είναι το πλαίσιο μέσα στο οποίο εκφράζεται, μελετάται, και αιτιολογείται η θεωρία συνόλων (όπως και άλλα θεμελιώδη συστήματα). Συνεπώς, αν αναφερόμαστε στο σύστημα στο οποίο μπορούν να κτιστούν όλα τα μαθηματικά, τότε το θεμέλιο των μαθηματικών είναι η θεωρία συνόλων (ιδιαίτερος το σύστημα ZFC), αλλά, αν αναφερόμαστε στα εργαλεία που δικαιολογούν, αναλύουν, και κάποιες φορές αμφισβητούν τη συνολοθεωρητική θεμελίωση των μαθηματικών, τότε το θεμέλιο των μαθηματικών είναι η μαθηματική λογική (η θεωρία συνόλων είναι τυποποιημένη σύμφωνα με τη μαθηματική λογική). Τόσο η μαθηματική λογική όσο και η θεωρία συνόλων είναι θεμελιώδεις, αλλά με διαφορετικούς και βαθιά διασυνδεδεμένους τρόπους.

Προηγουμένως, αναφέρθηκαν οι βασικές αρχές (εννέα αξιώματα) του συνολοθεωρητικού συστήματος ZFC. Οι βασικές αρχές της μαθηματικής λογικής είναι οι ακόλουθες:

1. **Προτάσεις (propositions) και αληθοτιμές (truth values):** Στο πλαίσιο της κλασσικής μαθηματικής λογικής, με τον όρο «πρόταση», εννοούμε μια δηλωτική απόφαση (declarative statement), που είναι είτε αληθής είτε ψευδής, αλλά όχι και τα δύο. Οι αληθοτιμές είναι τυπικώς: «αληθές» (true) και «ψευδές» (false).
2. **Λογικοί σύνδεσμοι:** Χρησιμοποιούνται για να κατασκευάζουμε σύνθετες αποφάνσεις από απλούστερες:

Σύμβολο	Όνομα	Παράδειγμα Νοήματος
$\neg$	Άρνηση	$\neg P$ : «όχι $P$ »
$\wedge$ ή $\&$	Σύζευξη	$P \wedge Q$ : « $P$ και $Q$ »
$\vee$	Διάζευξη	$P \vee Q$ : « $P$ ή $Q$ »
$\rightarrow$	Συνεπαγωγή	$P \rightarrow Q$ : «αν $P$ , τότε $Q$ »
$\leftrightarrow$	Ισοδυναμία	$P \leftrightarrow Q$ : « $P$ αν και μόνο αν $Q$ »

Αυτοί οι σύνδεσμοι ακολουθούν πίνακες αλήθειας, οι οποίοι ορίζουν με ακρίβεια την αληθοτιμή των σύνθετων αποφάνσεων με βάση τα μέρη τους. Με έναν πολύ ενδιαφέροντα και χρήσιμο, συνοπτικό τρόπο, ο Clive Newstead, στο βιβλίο του *An Infinite Descent into Pure Mathematics* (2025, Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International Licence), εξήγησε ότι:

- Η σύζευξη  $\wedge$  είναι ο λογικός τελεστής που ορίζεται από τους εξής κανόνες:  
Αν το  $P$  είναι αληθές, και αν το  $Q$  είναι αληθές, τότε το  $P \wedge Q$  είναι αληθές.

Αν το  $P \wedge Q$  είναι αληθές, τότε το  $P$  είναι αληθές.

Αν το  $P \wedge Q$  είναι αληθές, τότε το  $Q$  είναι αληθές.

- Η διάζευξη  $\vee$  είναι ο λογικός τελεστής που ορίζεται από τους εξής κανόνες:

Αν το  $P$  είναι αληθές, τότε το  $P \vee Q$  είναι αληθές.

Αν το  $Q$  είναι αληθές, τότε το  $P \vee Q$  είναι αληθές.

Αν το  $P \vee Q$  είναι αληθές, και αν το  $R$  μπορεί να παραχθεί από το  $P$  και από το  $Q$ , τότε το  $R$  είναι αληθές.

Κατανοώντας το τι σημαίνουν οι σύνδεσμοι «και» και «ή» στα μαθηματικά με τον ανωτέρω τρόπο, έχουμε αμέσως στη διάθεσή μας αποδεικτικές στρατηγικές για την απόδειξη θεωρημάτων. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Clive Newstead, η συνεπαγωγή  $\rightarrow$  μπορεί να γίνει κατανοητή ως ένας λογικός τελεστής που ορίζεται από τους εξής κανόνες: **(i)** Αν το  $Q$  μπορεί να παραχθεί από την υπόθεση ότι το  $P$  είναι αληθές, τότε το  $P \rightarrow Q$  είναι αληθές. **(ii)** Αν το  $P \rightarrow Q$  είναι αληθές, και αν το  $P$  είναι αληθές, τότε το  $Q$  είναι αληθές.

3. **Λογική ισοδυναμία:** Δύο αποφάνσεις είναι λογικώς ισοδύναμες αν έχουν πάντοτε την ίδια αληθοτιμή σε καθεμιά δυνατή περίπτωση. Για παράδειγμα, η απόφαση  $P \rightarrow Q$  είναι λογικώς ισοδύναμη με την απόφαση  $\neg P \vee Q$ , και αυτό αποδεικνύεται είτε μέσω πινάκων αλήθειας είτε μέσω τυπικής απόδειξης.

4. **Ποσοτικοποιητές:** Χρησιμοποιούνται για να αναφερθούμε στο «πόσα» ή στο «ποια» στοιχεία ενός πεδίου αφορά μια απόφαση:

Σύμβολο	Όνομα	Παράδειγμα Νοήματος
$\forall$	Καθολικός ποσοτικοποιητής	$\forall x, P(x)$ : «για κάθε $x$ , ισχύει ότι $P(x)$ »
$\exists$	Υπαρξιακός ποσοτικοποιητής	$\exists x   P(x)$ : «υπάρχει $x$ τέτοιο ώστε $P(x)$ »

5. **Κατηγορήματα και κατηγορική λογική:** Ένα κατηγορήμα είναι μια απόφαση που περιέχει μεταβλητές (π.χ.,  $P(x)$ : «το  $x$  είναι άρτιο»), και δεν αποτελεί «πρόταση» ωστόσο οι μεταβλητές του λάβουν μια αληθοτιμή ή ποσοτικοποιθούν.

6. **Νόμοι της κλασσικής λογικής και μέθοδοι απόδειξης:**

- **Νόμος της ταυτότητας:**  $A = A$ .
- **Νόμος της μη-αντίφασης:**  $\neg(A \wedge \neg A)$  (δεν μπορεί να ισχύουν ταυτοχρόνως και μια απόφαση και η άρνηση εκείνης της απόφασης).
- **Νόμος του αποκλειόμενου μέσου ή τρίτου:**  $A \vee \neg A$  (είτε αληθεύει μια απόφαση είτε αληθεύει η άρνηση εκείνης της απόφασης).
- **Νόμος *modus ponens* (άμεση συναγωγή):** Αν  $A \rightarrow B$ , και αν το  $A$  είναι