ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

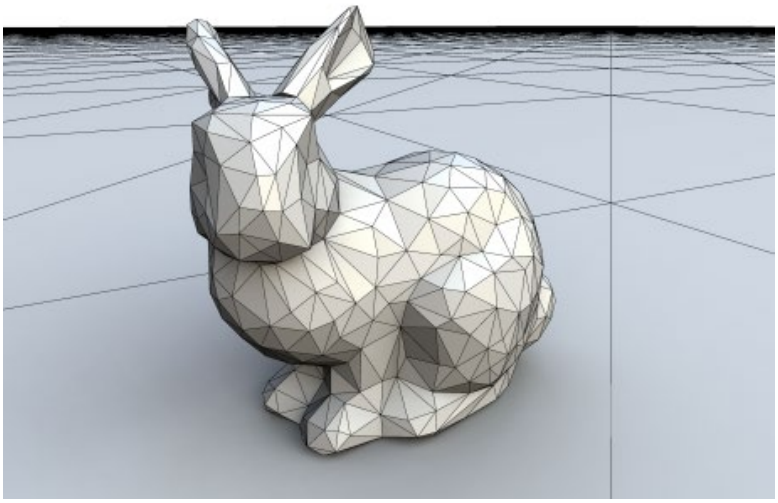
Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

Με τον όρο *Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί* εννοούμε συναρτήσεις που απεικονίζουν σημεία του δισδιάστατου ή τρισδιάστατου χώρου, δηλαδή μέλη του R^2 ή του R^3, σε άλλα σημεία, τυπικά στου ίδιου χώρου με τα αρχικά. Όπως στα Γραφικά Υπολογιστών συνήθως αναφερόμαστε με τον απλό όρο *Γραφικά,* έτσι και στους Γεωμετρικούς Μετασχηματισμούς, στα πλαίσια των Γραφικών, είθισται να αναφερόμαστε με τον απλό όρο *Μετασχηματισμοί (Transformations)* και η απεικόνιση να μη γίνεται απαραίτητα στον ίδιο χώρο.

Αν έπρεπε να επιλέξουμε μόνο μια μαθηματική έννοια ως την πιο σημαντική για τα Γραφικά οι Μετασχηματισμοί θα ήταν σίγουρα η πρώτη υποψήφια. Αν κάποιος δεν έχει το χρόνο ή τη διάθεση να ασχοληθεί με τα Γραφικά αλλά θέλει να πάρει μόνο μια ιδέα για το αντικείμενο, οι Μετασχηματισμοί είναι ένα από τα θέματα που αξίζει να δει. Κάθε ήρωας και όχημα που έχουμε δει να κινείται στο συνθετικό κόσμο ενός βιντεοπαιχνιδιού το έχει κάνει ως αποτέλεσμα της εφαρμογής ενός ή περισσότερων μετασχηματισμών. Κάθε τρισδιάστατη σκηνή που έχει δημιουργηθεί στον υπολογιστή για τις ανάγκες μιας ταινίας, μιας επιστημονικής αναπαράστασης, της σχεδίασης κτιρίων ή μηχανολογικών εξαρτημάτων, έχει αξιοποιήσει τα μαθηματικά εργαλεία που μας προσφέρουν οι μετασχηματισμοί.

4.1 Αντικείμενα

Ένα αντικείμενο στο συνθετικό μας κόσμο αποτελείται από ένα σύνολο στοιχειωδών επιφανειών που συνήθως είναι τρίγωνα. Τα τρίγωνα αυτά ορίζονται από τις συντεταγμένες των κορυφών τους και, βέβαια, θεωρούμε ότι, ανά πάσα στιγμή, αναφέρονται στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.



Σχήμα 4.1. *Αντικείμενο από ένα σύνολο στοιχειωδών αντικειμένων [Utrecht14]*

Είναι πολύ σημαντικό, για όλο το κεφάλαιο, να θυμόμαστε ότι, παρότι στα Γραφικά μας απασχολούν ολοκληρωμένα αντικείμενα 2 ή 3 διαστάσεων, κάθε μετασχηματισμός που θα συζητήσουμε, από υπολογιστική άποψη, εφαρμόζεται σε κάθε κορυφή του αντικειμένου μεμονωμένα. Το συνολικό αποτέλεσμα για το αντικείμενο προκύπτει από τα επιμέρους αποτελέσματα της εφαρμογής του μετασχηματισμού σε κάθε κορυφή του αντικειμένου.

Μία τυπική αιτιολόγηση για αυτό, χωρίς να υπεισέλθουμε στις μαθηματικές λεπτομέρειες είναι ότι οι μετασχηματισμοί που θα συζητήσουμε είναι *συσχετισμένοι μετασχηματισμοί* που δεν αλλοιώνουν ένα ελάχιστο αποδεκτό σύνολο από τις γεωμετρικές ιδιότητες του αντικειμένου που μας ενδιαφέρουν. Διαισθητικά, θεωρώντας κάθε μετασχηματισμό μία απεικόνιση, οι συσχετισμένοι μετασχηματισμοί μας *εγγυώνται* ότι ευθύγραμμα τμήματα απεικονίζονται σε ευθύγραμμα τμήματα, συγγραμμικά σημεία παραμένουν συγγραμικά, παράλληλες γραμμές παραμένουν παράλληλες και αναλογίες μηκών στην ίδια ή σε παράλληλες ευθείες παραμένουν α-

ναλλοίωτες. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν υπάρχει εγγύηση ότι θα διατηρηθούν αναλλοίωτα τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων καθώς και οι γωνίες των αντικειμένων μας, όπως άλλωστε θα γίνει φανερό και στα παραδείγματα των επόμενων ενοτήτων.

Στην παρακάτω συζήτηση καλό είναι επίσης να θυμόμαστε πως για να εκφράσουμε στην οθόνη το τελικό οπτικό αποτέλεσμα που επιδιώκουμε οφείλουμε να μεταφράσουμε τις ενέργειες που πρέπει να γίνουν σε υπολογιστικά βήματα. Αυτό σημαίνει ότι, όπως και στον προγραμματισμό, πολλές φορές, ο τρόπος για να το επιτύχουμε δεν είναι ο πιο διαισθητικός. Θα πρέπει να πειθαρχήσουμε τη σκέψη μας, ώστε να ακολουθήσει μια διαδρομή χρησιμοποιώντας τα διαθέσιμα εργαλεία προκειμένου να φτάσει στο στόχο. Παρόμοια με τις βασικές μαθηματικές πράξεις, τις οποίες χρησιμοποιούμε για να χτίσουμε πολύπλοκες μαθηματικές εκφράσεις, θα βασιστούμε σε μια σειρά βασικών μετασχηματισμών για να επιτύχουμε στη συνέχεια πιο πολύπλοκα αποτελέσματα. Η εξοικείωση, επομένως, με τους βασικούς μετασχηματισμούς είναι πολύ σημαντική και θα μας επιτρέψει την κατανόηση των σύνθετων μετασχηματισμών που θα ακολουθήσουν.

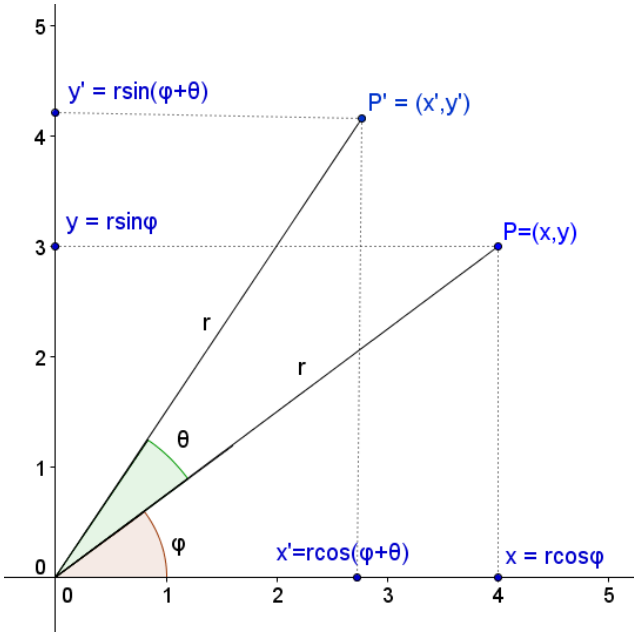
4.2 Μετασχηματισμοί 2 διαστάσεων

4.2.1 Περιστροφή (Rotation)

Περιστροφή σημείου σε 2 διαστάσεις (επίπεδο xy)

Ο στοιχειώδης μετασχηματισμός περιστροφής (rotation), στο χώρο 2 διαστάσεων, αναφέρεται και εφαρμόζεται γύρω από την αρχή των αξόνων. Συγκεκριμένα, έχοντας ως παράμετρο τη γωνία περιστροφής, περιστρέφει κάθε σημείο στο οποίο εφαρμόζεται, κατά τη γωνία που δίνεται ως παράμετρος. Συνήθως τον συμβολίζουμε με $R(\theta)$ όπου θ η γωνία περιστροφής.

Έστω ένα σημείο P που απέχει r από την αρχή των αξόνων και η γωνία του σε σχέση με τη θετική φορά του x είναι φ. Τυπικά, οι πολικές συντεταγμένες του P είναι $(r,\varphi)_p$. Μετά την περιστροφή του κατά θ, το (νέο) σημείο P' θα απέχει πάλι r από την αρχή των αξόνων αλλά η γωνία του πια θα είναι $\varphi+\theta$, με άλλα λόγια $P'=(r,\varphi+\theta)_p$. Επειδή συνήθως εργαζόμαστε με καρτεσιανές συντεταγμένες, αξίζει να δούμε τι συμβαίνει με αυτές κατά την περιστροφή.



Σχήμα 4.2. *Περιστροφή σημείου*

Οι αρχικές συντεταγμένες του σημείου P=(x,y), όπως φαίνεται και από το σχήμα, είναι:

$$x=r\cdot\cos\varphi$$

$$y=r\cdot\sin\varphi$$

Μετά την περιστροφή, οι (νέες) καρτεσιανές συντεταγμένες P'=(x',y') γίνονται:

$$x'=r\cdot\cos(\varphi+\theta)$$

$$y'=r\cdot\sin(\varphi+\theta)$$

Ανατρέχοντας στους τριγωνομετρικούς τύπους για το συνημίτονο και το ημίτονο αθροίσματος γωνιών μπορούμε να δούμε ότι:

$$x'=r\cdot(\cos\varphi\cdot\cos\theta-\sin\varphi\cdot\sin\theta)=\mathbf{r\cdot\cos\varphi}\cdot\cos\theta-\mathbf{r\cdot\sin\varphi}\cdot\sin\theta=\mathbf{x}\cdot\cos\theta-\mathbf{y}\cdot\sin\theta$$

$$y'=r\cdot(\cos\varphi\cdot\sin\theta+\sin\varphi\cdot\cos\theta)=\mathbf{r\cdot\cos\varphi}\cdot\sin\theta+\mathbf{r\cdot\sin\varphi}\cdot\cos\theta=\mathbf{x}\cdot\sin\theta+\mathbf{y}\cdot\cos\theta$$

Για λόγους που θα αναλυθούν στη συνέχεια, μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η έκφραση κάθε μετασχηματισμού ως πράξης μεταξύ πινάκων. Σε αυτό το πλαίσιο, θα θεωρούμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου P ως έναν πίνακα 2×1 (2 γραμμές, 1 στήλη):

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot cos\varphi \\ r \cdot sin\varphi \end{bmatrix}$$

και τον εκάστοτε μετασχηματισμό ως έναν πίνακα 2×2. Η πράξη του μετασχηματισμού θα είναι μεταξύ του πίνακα 2×2 και του πίνακα 2×1. Υπό αυτό το πρίσμα λοιπόν, το R(θ) μπορεί να γραφεί:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

και να ισχύει P'=R(θ)·P.

Πράγματι, αν θυμηθούμε τον πολλαπλασιασμό πινάκων, το (εσωτερικό) γινόμενο της πρώτης γραμμής του R(θ) με την πρώτη (και μοναδική) στήλη του P, που θα είναι και η πρώτη γραμμή του αποτελέσματος P', είναι

$$\cos\theta \cdot \mathbf{r \cdot cos\varphi} - \sin\theta \cdot \mathbf{r \cdot sin\varphi} = \cos\theta \cdot \mathbf{x} - \sin\theta \cdot \mathbf{y} = x'$$

Αντίστοιχα για το y':

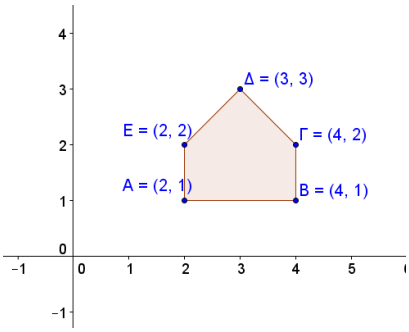
$$\sin\theta \cdot \mathbf{r \cdot cos\varphi} + \mathrm{con}\theta \cdot \mathbf{r \cdot sin\varphi} = \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y = y'$$

Αν, για κάποιο λόγο, θέλουμε να εκφράσουμε μία περιστροφή που δε θα επηρεάσει καθόλου ένα αντικείμενο, παρατηρούμε πως θα πρέπει να δώσουμε γωνία θ=0. Σε αυτήν την περίπτωση ο R(0) ισούται με τον μοναδιαίο πίνακα (γιατί cos0=1 και sin0=0) οπότε οι συντεταγμένες του κάθε σημείου παραμένουν αμετάβλητες. Μπορούμε λοιπόν, λίγο καταχρηστικά, να πούμε πως, το ουδέτερο στοιχείο για τις γωνίες περιστροφής είναι το 0, ή, πιο τυπικά, πως το ουδέτερο στοιχείο του μετασχηματισμού περιστροφής είναι το R(0).

Περιστροφή αντικειμένου σε 2 διαστάσεις (επίπεδο xy)

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή του κεφαλαίου, η περιστροφή ενός αντικειμένου δεν είναι τίποτα άλλο παρά η εφαρμογή του ίδιου μετασχηματισμού περιστροφής σε κάθε σημείο που το ορίζει.

Έστω ένα αρχικό πολυγωνικό αντικείμενο που ορίζεται από τα σημεία ΑΒΓΔΕ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.3. *Αρχικό αντικείμενο Π*

Η περιστροφή του παραπάνω αντικειμένου κατά π/2 (δηλαδή κατά 90°), δεν είναι τίποτα άλλο παρά η εφαρμογή του R(π/2) σε όλα τα σημεία που το ορίζουν. Υπενθυμίζεται ότι cos(π/2)=0 και sin(π/2)=1 οπότε ο πίνακας είναι:

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} cos\frac{\pi}{2} & -sin\frac{\pi}{2} \\ sin\frac{\pi}{2} & cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Με άλλα λόγια, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη νέα θέση του αντικειμένου A'B'Γ'Δ'E', θα πρέπει να υπολογίσουμε τα παρακάτω γινόμενα πινάκων:

$$A'=R(\pi/2)\cdot A$$

$$B'=R(\pi/2)\cdot B$$

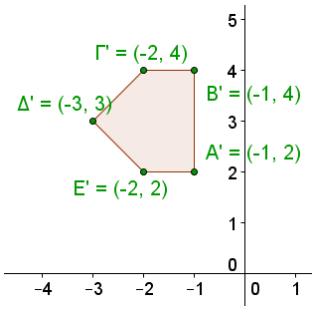
$$\Gamma'=R(\pi/2)\cdot \Gamma$$

$$\Delta'=R(\pi/2)\cdot \Delta$$

$$E'=R(\pi/2)\cdot E$$

που για το παραπάνω σχήμα μας δίνουν

A'=(-1,2), B'=(-1,4), Γ'=(-2,4), Δ'=(-3,3), E'=(-2,2).



Σχήμα 4.4. *Αντικείμενο Π μετά από περιστροφή κατά π/2 (90º)*

Παρατηρούμε ότι, το αντικείμενο περιστράφηκε γύρω από την αρχή των αξόνων, όπως ήταν αναμενόμενο, κι όχι γύρω από κάποιο υποτιθέμενο κέντρο του. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, όταν θα συζητήσουμε σύνθετους μετασχηματισμούς, αν θέλουμε να επιτύχουμε περιστροφή γύρω από κάποιο άλλο επιλεγμένο σημείο, θα πρέπει να το αναλύσουμε σε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς που η διαδοχική εφαρμογή τους θα οδηγήσει στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Αξίζει επίσης να σημειώσουμε εδώ πως, πολλές φορές, το αποτέλεσμα ενός μετασχηματισμού μπορούμε να το προβλέψουμε "με το μάτι" καθώς έχουμε το πλεονέκτημα της οπτικής επισκόπησης και της ανθρώπινης νοημοσύνης μας, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για απλές περιπτώσεις όπως η περιστροφή κατά 90º. Πράγματι, εδώ μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε πως η συγκεκριμένη περιστροφή για ένα σημείο (x,y) οδηγεί σε συντεταγμένες (-y,x). Όμως στα Γραφικά, είμαστε υποχρεωμένοι να δώσουμε σαφείς οδηγίες στον υπολογιστή ώστε να υπολογίσει το αποτέλεσμα σε κάθε περίπτωση και χωρίς τα παραπάνω δικά μας πλεονεκτήματα. Κάθε φορά λοιπόν που κάτι μπορεί να μας φαίνεται εύκολο να το υπολογίσουμε "με το μάτι" αξίζει να αναρωτιόμαστε ποιες είναι οι κατάλληλες οδηγίες που πρέπει να δώσουμε στον υπολογιστή ώστε καταλήξει στο ίδιο αποτέλεσμα. Από την άλλη, αυτό μας το πλεονέκτημα μπορεί να μας βοηθήσει να επαληθεύσουμε διαισθητικά κάποια αποτελέσματα που προκύπτουν υπολογιστικά.

4.2.2 Κλιμάκωση (Scaling)

Κλιμάκωση σημείου σε 2 διαστάσεις (επίπεδο xy)

Ο στοιχειώδης μετασχηματισμός κλιμάκωσης στο επίπεδο εφαρμόζεται ανεξάρτητα σε κάθε διάσταση και αφορά τον πολλαπλασιασμό της συντεταγμένης του κάθε σημείου με έναν συντελεστή κλιμάκωσης. Συνήθως συμβολίζεται με $S(s_x,s_y)$ όπου

s_x ο συντελεστής κλιμάκωσης ως προς x και s_y ο συντελεστής κλιμάκωσης ως προς y.

Αντίθετα με την περιστροφή, η κλιμάκωση των συντεταγμένων ενός σημείου δεν έχει ιδιαίτερο διαισθητικό νόημα, αλλά όπως και στην περιστροφή, θα αποτελέσει τη βάση για την κλιμάκωση αντικειμένων, όπου θα έχει νόημα η έκφραση, για παράδειγμα, "διπλασιασμός του ύψους του αντικειμένου". Συνεπώς θα οριστεί και πάλι αρχικά ο στοιχειώδης μετασχηματισμός κλιμάκωσης σημείου και στη συνέχεια θα εφαρμοστεί σε αντικείμενα.

Οι επιμέρους πράξεις σε κάθε διάσταση, στην περίπτωση της κλιμάκωσης, είναι απλούστερες από ότι στην περιστροφή, και εξαντλούνται στον απλό πολλαπλασιασμό της κάθε συντεταγμένης του σημείου με τον αντίστοιχο συντελεστή κλιμάκωσης. Δηλαδή, αν θέλουμε να εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό κλιμάκωσης $S(s_x,s_y)$ σε ένα σημείο P=(x,y), θα υπολογίσουμε τα παρακάτω:

$$x'=s_x \cdot x$$

$$y'=s_y \cdot y$$

όπου P'=(x',y') θα είναι η νέα θέση του σημείου.

Αντίστοιχα με πριν, μας ενδιαφέρει η έκφραση του μετασχηματισμού κλιμάκωσης ως πίνακα 2×2. Η μορφή του είναι αρκετά απλούστερη σε σχέση με της περιστροφής, συγκεκριμένα:

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

και ισχύει $P'= S(s_x,s_y)\cdot P$.

Μπορούμε εύκολα να "επαληθεύσουμε" ότι

$$x' = s_x \cdot x+0 \cdot y = s_x \cdot x$$

και αντίστοιχα για το

$$y' = 0 \cdot x+ s_y \cdot y = s_y \cdot y$$

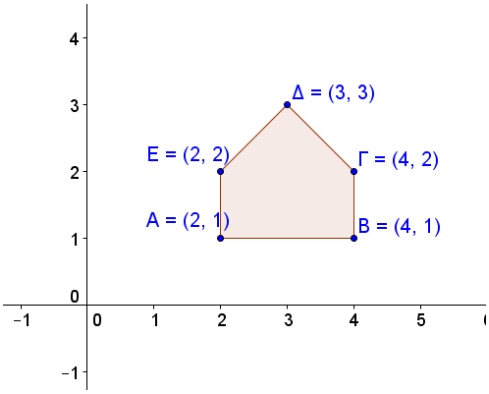
Στη συζήτηση για το ουδέτερο στοιχείο της κλιμάκωσης παρατηρούμε πως, δεν μπορούμε να θεωρήσουμε το 0 ως κατάλληλο συντελεστή για να παραμείνουν οι συντεταγμένες ενός σημείου αμετάβλητες: κάτι τέτοιο θα οδηγούσε στο μηδενισμό της μίας ή και των δύο συντεταγμένων του σημείου. Για να παραμείνουν οι συντεταγμένες ενός σημείου αμετάβλητες θα πρέπει να δώσουμε συντελεστές κλιμάκωσης $s_x=s_y=1$ ώστε να προκύψει ο μοναδιαίος πίνακας. Με άλλα λόγια το ουδέτερο

στοιχείο του μετασχηματισμού κλιμάκωσης είναι το S(1,1). Θα δούμε το θέμα αυτό πιο αναλυτικά στη συζήτηση για την κλιμάκωση αντικειμένων.

Κλιμάκωση αντικειμένου σε 2 διαστάσεις (επίπεδο xy)

Όπως είδαμε και στη γενίκευση του μετασχηματισμού περιστροφής σε αντικείμενα, δεν έχουμε παρά να εφαρμόσουμε τον ίδιο μετασχηματισμό κλιμάκωσης σε όλα τα σημεία που ορίζουν το αντικείμενο προκειμένου να πετύχουμε την κλιμάκωσή του. Στην περίπτωση της κλιμάκωσης έχουμε μάλιστα 2 ανεξάρτητες παραμέτρους (συντελεστές κλιμάκωσης ως προς x και ως προς y) κάτι που μας δίνει την ελευθερία π.χ. να τριπλασιάσουμε το πλάτος ενός αντικειμένου και να κάνουμε το ύψος του μισό δίνοντας τους κατάλληλους συντελεστές. Σε περίπτωση που οι παράμετροι αυτές είναι ίσες τότε αναφερόμαστε στην ειδική περίπτωση της ομοιόμορφης (uniform) ή και ισοτροπικής (isotropic) κλιμάκωσης.

Γενικά, έστω και πάλι το αντικείμενο που ορίζεται από τα σημεία ΑΒΓΔΕ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.5. *Αρχικό αντικείμενο Π*

Ας υποθέσουμε πως πράγματι θέλουμε να τριπλασιάσουμε το πλάτος του και να μειώσουμε το ύψος του στο μισό. Για να το εκφράσουμε αυτό θα πρέπει να δώσουμε s_x=3 και s_y=1/2, με άλλα λόγια ο μετασχηματισμός κλιμάκωσης που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ο S(3,1/2). Τα σημεία που θα ορίζουν το νέο αντικείμενο είναι:

$$A'=S(3,1/2)\cdot A$$

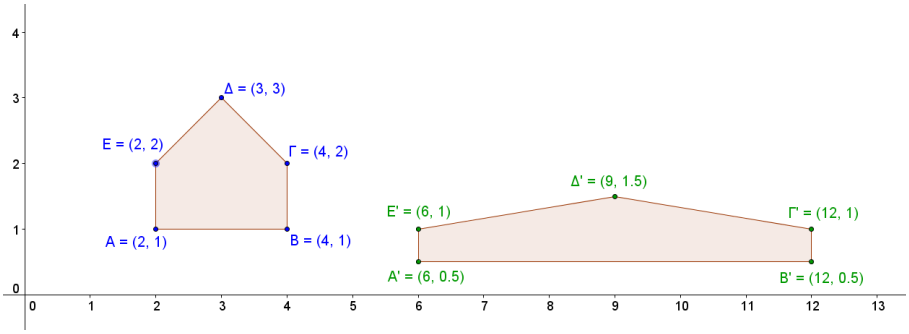
$$B'=S(3,1/2)\cdot B$$

$$\Gamma'=S(3,1/2)\cdot \Gamma$$

$$\Delta' = S(3,1/2)\cdot\Delta$$

$$E' = S(3,1/2)\cdot E$$

και η μορφή του φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

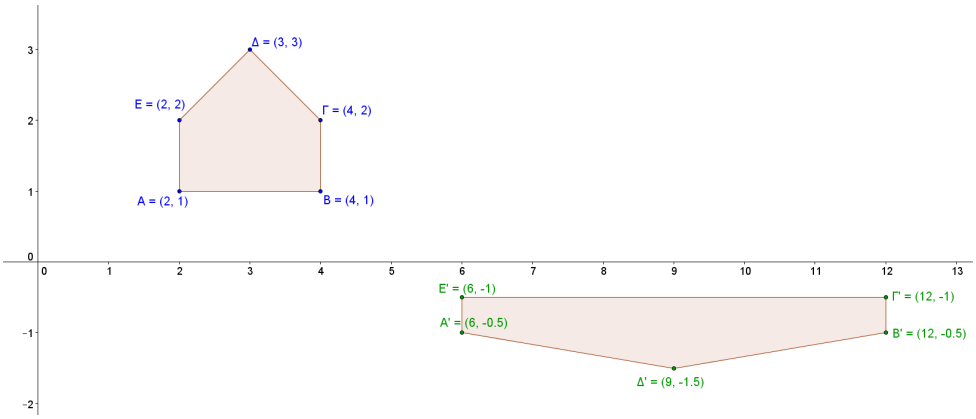


Σχήμα 4.6. *Το αντικείμενο Π αρχικά και μετά από κλιμάκωση* $S(3,\frac{1}{2})$

Παρατηρούμε πως πράγματι το πλάτος του αντικειμένου έχει τριπλασιαστεί: πριν το μετασχηματισμό, η οριζόντια απόσταση π.χ. μεταξύ Α και Β ήταν x_B-x_A = 4-2 = 2 και τώρα είναι $x_{B'}$-$x_{A'}$ = 12-6 = 6. Αξίζει να σημειώσουμε πως αυτό ήταν αριθμητικά αναμενόμενο αφού όλα τα x πολλαπλασιάστηκαν με 3 οπότε $3\cdot x_B$-$3\cdot x_A$ =$3\cdot(x_B$-$x_A)$ και αυτός είναι ο λόγος που, ενώ ο μετασχηματισμός εφαρμόζεται στις κορυφές μεμονωμένα, έχουμε το διαισθητικό αποτέλεσμα της κλιμάκωσης του συνολικού πλάτους του. Αντίστοιχα, το ύψος έχει μειωθεί στο μισό αφού η κάθετη απόσταση π.χ. μεταξύ Δ και Α ήταν 3-1=2 και τώρα είναι 1.5-0.5=1.

Παρατηρούμε όμως πως, ως ένα παράπλευρο αποτέλεσμα της κλιμάκωσης, το αντικείμενο έχει μετακινηθεί: η κάτω αριστερή άκρη του, το σημείο Α, βρισκόταν στο (2,1) και το Α' βρίσκεται τώρα στο (6,0.5). Ακόμα κι αν θεωρούσαμε ως προσεγγιστικό κέντρο του αρχικού σχήματος τη μέση της απόστασης μεταξύ Ε και Γ, το (3,2), αυτό τώρα βρίσκεται στο (9,1). Αυτό συμβαίνει από τη φύση του μετασχηματισμού κλιμάκωσης: τα σημεία κλιμακώνονται σε σχέση με την αρχή των αξόνων. Ίσως θα περιμέναμε το αντικείμενο να κλιμακωθεί ομοιόμορφα γύρω από κάποιο κέντρο του αλλά αυτό θα συνέβαινε μόνο αν το κέντρο του βρισκόταν στο (0,0).

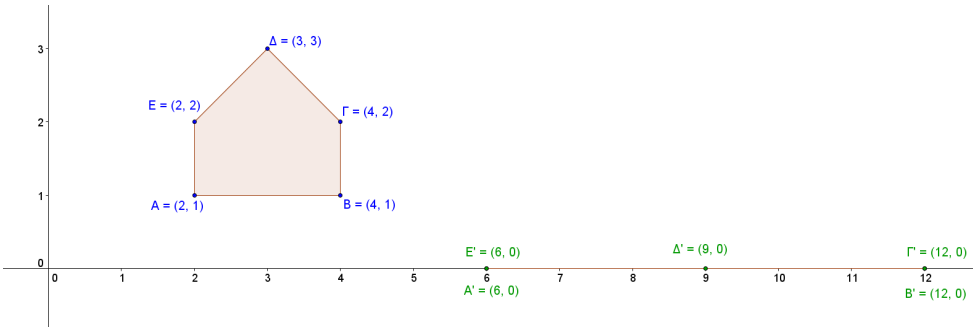
Μια άλλη ενδιαφέρουσα ιδιότητα της κλιμάκωσης είναι αυτή που προκύπτει όταν χρησιμοποιούνται αρνητικοί συντελεστές. Συγκεκριμένα ας δούμε τι θα συμβεί στο ίδιο αρχικό σχήμα αν εφαρμοστεί η κλιμάκωση R(3,-1/2):



Σχήμα 4.7. *Το αντικείμενο Π αρχικά και μετά από κλιμάκωση* $S(3, -\frac{1}{2})$

Παρατηρούμε πως το πλάτος και πάλι τριπλασιάστηκε όπως ήταν αναμενόμενο και το ύψος έχει και πάλι μειωθεί στο μισό αλλά με το επιπλέον αποτέλεσμα το αντικείμενο να έχει κατοπτριστεί ως προς τον άξονα x'x. Αυτό είναι το αποτέλεσμα του αρνητικού συντελεστή κλιμάκωσης σε έναν άξονα: προκαλεί κατοπτρισμό ως προς τον *άλλο* άξονα αφού οι συντεταγμένες αλλάζουν πρόσημο (και άρα τα σημεία αλλάζουν ημιεπίπεδο σε σχέση με τον *άλλο* άξονα). Αξίζει να σημειωθεί πως εδώ οι αρχικές συντεταγμένες ήταν θετικές και έγιναν αρνητικές αλλά κάλλιστα θα μπορούσε να συμβεί το αντίθετο ή το σχήμα να επικαλύπτει τον άξονα και κάποιες από τις αρχικές συντεταγμένες των κορυφών του να ήταν θετικές και κάποιες αρνητικές: σε κάθε περίπτωση το αποτέλεσμα θα ήταν και πάλι να κλιμακωθεί και να κατοπτριστεί.

Τέλος, ας δούμε τι συμβαίνει όταν χρησιμοποιήσουμε μηδενικούς συντελεστές ως προς κάποιον άξονα. Συγκεκριμένα, έστω ότι εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός R(3,0) στο παραπάνω αρχικό σχήμα.



Σχήμα 4.8. *Το αντικείμενο Π αρχικά και μετά από κλιμάκωση S(3,0)*

Παρατηρούμε πως, ως προς το πλάτος, το αποτέλεσμα παραμένει το ίδιο αλλά το αντικείμενο έχει πια μηδενικό ύψος και μάλιστα όλα του τα σημεία βρίσκονται στον άξονα x'x. Αυτό ήταν αριθμητικά αναμενόμενο, αφού όλες οι y συντεταγμένες των κορυφών του πολλαπλασιάστηκαν με 0. Θα μπορούσαμε να πούμε πως το αποτέλεσμα ενός μηδενικού συντελεστή στον ένα άξονα είναι όλες οι κορυφές του αντικειμένου να προβληθούν στον άλλο. Διαισθητικά, το αντικείμενο *έχασε μία διάσταση* αφού από ένα πολύγωνο 2 διαστάσεων προέκυψε ένα αντικείμενο που βρίσκεται εξ ολοκλήρου στον x'x.

4.2.3 Μετακίνηση (Translation)

Μετακίνηση σημείου σε 2 διαστάσεις (επίπεδο xy)

Η μετακίνηση (translation) είναι ο πιο διαισθητικά κατανοητός στοιχειώδης μετασχηματισμός. Έχουμε κι εδώ τη δυνατότητα να ορίσουμε ανεξάρτητη μετακίνηση ως προς κάθε άξονα η οποία απλά προστίθεται στις συντεταγμένες του σημείου. Συμβολίζεται συνήθως ως $T(t_x,t_y)$, από τον αντίστοιχο αγγλικό όρο *translation*, όπου t_x και t_y είναι η μετακίνηση ως προς x και y αντίστοιχα.

Οι επιμέρους πράξεις σε κάθε διάσταση για τις συντεταγμένες ενός σημείου P=(x,y) στο οποίο εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός μετακίνησης $T(t_x,t_y)$ είναι:

$$x'=x+t_x$$

$$y'=y+t_y$$

όπου P'=(x',y') είναι και εδώ η νέα θέση του σημείου.

Η έκφραση και αυτού του μετασχηματισμού ως πίνακα μπορεί να είναι η παρακάτω:

$$T(t_x, t_y) = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

και η αντίστοιχη πράξη μεταξύ πινάκων $P'=T(t_x,t_y)+P$.

Μετακίνηση αντικειμένου σε 2 διαστάσεις (επίπεδο xy)

Η μετακίνηση ενός αντικειμένου προκύπτει ως άμεση συνέπεια της μετακίνησης των κορυφών που το ορίζουν και δεν κρύβει εκπλήξεις. Έστω και πάλι το αντικείμενο ΑΒΓΔΕ στο οποίο αυτή τη φορά εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός μετακίνησης Τ(-1,2). Εκμεταλλευόμαστε και πάλι τη δυνατότητα να ορίσουμε διαφορετική μετακίνηση για κάθε άξονα. Οι νέες συντεταγμένες προκύπτουν κατά τα γνωστά:

$$A'=T(-1,2)+A$$

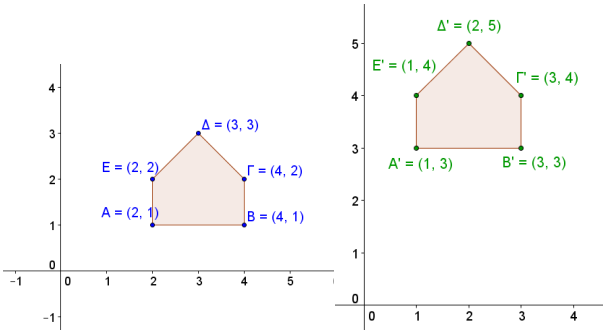
$$B'=T(-1,2)+B$$

$$\Gamma'=T(-1,2)+\Gamma$$

$$\Delta'=T(-1,2)+\Delta$$

$$E'=T(-1,2)+E$$

και το τελικό αντικείμενο φαίνεται παρακάτω δίπλα στο αρχικό.



Σχήμα 4.9. *Το αντικείμενο Π αρχικά και μετά από μετακίνηση* $T(-1,2)$

4.2.4 Διάτμηση (Shearing)

Διάτμηση σημείου σε 2 διαστάσεις (επίπεδο xy)

Η *διάτμηση* (ή και *διατομή ή στρέβλωση* στη βιβλιογραφία), στο επίπεδο xy, εκφράζει την αλλοίωση της μίας συντεταγμένης ενός σημείου σε αναλογία με την τιμή της άλλης συντεταγμένης. Μία πρακτική διάταξη, για να αντιληφθούμε διαισθητικά το μετασχηματισμό, είναι μία κάθετη στοίβα από χαρτιά και ένας χάρακας που εφάπτεται κατά μήκος της μίας κάθετης πλευράς της στοίβας σε όλο το ύψος της: διατηρώντας σταθερή στη βάση του χάρακα και την επαφή του με την πλευρά της στοίβας, δίνουμε κλίση στη στοίβα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, τα χαρτιά που βρίσκονται ψηλότερα στη στοίβα (έστω ότι αυτό υπονοεί ότι διαθέτουν μεγαλύτερο y) μετακινούνται περισσότερο από την αρχική τους θέση σε σχέση με αυτά που βρίσκονται χαμηλότερα. Με άλλα λόγια, μεταβάλλεται περισσότερο η οριζόντια θέση, δηλαδή το x, των υψηλότερων, χωρίς ωστόσο να αλλάζει για κανένα το ύψος του, δηλαδή το y (αν δεν ανατρέψουμε βέβαια τη στοίβα!).

Η παραπάνω διάταξη, με βάση τις παραδοχές που κάναμε, αντιστοιχεί σε διάτμηση ως προς x, ωστόσο ο μετασχηματισμός μπορεί συμμετρικά να οριστεί και ως προς y. Η μαθηματική έκφραση για τις νέες συντεταγμένες του σημείου, στην περίπτωση της διάτμησης ως προς x, είναι:

$$x' = x + h_x \cdot y$$
$$y' = y$$

όπου h_x ο συντελεστής διάτμησης ως προς x. Οι παραπάνω εκφράσεις μπορούν να συγκεραστούν και πάλι σε πίνακα, δίνοντας τον αντίστοιχο πίνακα μετασχηματισμού για τη διάτμηση ως προς x με συμβολισμό SH_x

$$SH_x(h_x) = \begin{bmatrix} 1 & h_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και ισχύει $P' = SH_x(h_x) \cdot P$.

Συμμετρικά, για διάτμηση ως προς y έχουμε:

$$x' = x$$
$$y' = y + h_y \cdot x$$

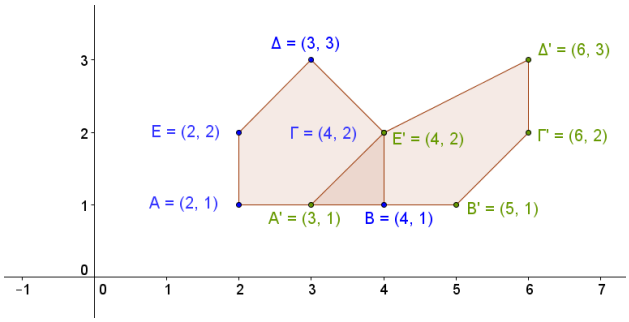
και το σχετικό πίνακα μετασχηματισμού με συμβολισμό SH_y:

$$SH_y(h_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_y & 1 \end{bmatrix}$$

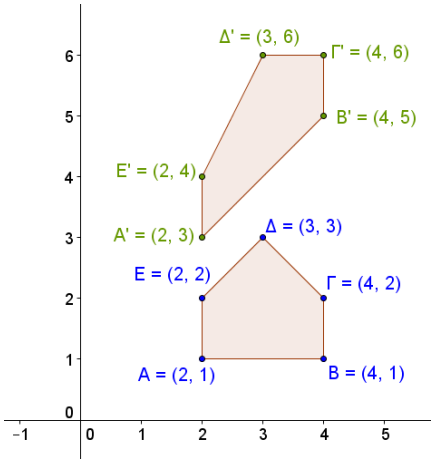
όπου ισχύει και πάλι $P' = SH_y(h_y) \cdot P$.

Διάτμηση αντικειμένου σε 2 διαστάσεις (επίπεδο xy)

Η διάτμηση ενός αντικειμένου αποτελεί πρακτικά μαθηματική έκφραση όσων συζητήσαμε για την επίδραση της διάτμησης σε κάθε σημείο ανάλογα με τις συντεταγμένες του αλλά και όσων παρατηρήσαμε στην πρακτική διάταξη με τη στοίβα των χαρτιών και το χάρακα. Στα επόμενα γραφήματα εμφανίζονται δύο εκδοχές διάτμησης για το ίδιο αντικείμενο Π που είδαμε και στα προηγούμενα παραδείγματα, για κοινή τιμή του συντελεστή ίση με 1, ως προς x και ως προς y.



Σχήμα 4.10. *Το αντικείμενο Π αρχικά και μετά από διάτμηση* $SH_x(1)$



Σχήμα 4.11. *Το αντικείμενο Π αρχικά και μετά από διάτμηση* $SH_y(1)$

4.3 Ομογενείς Συντεταγμένες

4.3.1 Βασικές έννοιες

Στην προσπάθειά μας να εκφράσουμε κάθε μετασχηματισμό σε μορφή πίνακα παρατηρήσαμε πως, τόσο ο μετασχηματισμός περιστροφής όσο και κλιμάκωσης, απεικονίστηκαν σε πίνακες 2×2 και η πράξη εφαρμογής τους σε κάποιο σημείο ήταν πολλαπλασιασμός πινάκων. Αντίθετα, ο πίνακας μετασχηματισμού της μετακίνησης είναι 2×1 και η αντίστοιχη πράξη είναι πρόσθεση.

Το υλικό (hardware) που υλοποιεί αλγορίθμους Γραφικών καλείται να διαχειριστεί μεγάλους όγκους δεδομένων και για αυτό το λόγο είναι επιθυμητή η αυξημένη δυνατότητα παράλληλης επεξεργασίας. Ένας τρόπος να αυξηθεί η τελευταία είναι η εξασφάλιση όσο το δυνατόν πιο ομοιογενών μορφών δεδομένων και λειτουργιών πάνω σε αυτά. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να έχουμε εξειδικευμένο λογισμικό υψηλής παραλληλίας που μπορεί να διαχειριστεί όλες τις επεξεργαστικές ανάγκες και να προσαρμόζεται εύκολα στην έκαστοτε κατανομή τους αφού όλες εμπίπτουν σε αυτές τις ομοιογενείς κατηγορίες μορφών και λειτουργιών.

Με το παραπάνω σκεπτικό, η υλοποίηση του μετασχηματισμού μετακίνησης ως πρόσθεσης πινάκων 2×1 ενώ αυτών της περιστροφής και της κλιμάκωσης ως πολλαπλασιασμού πίνακα 2×2 με πίνακα 2×1 δεν είναι επιθυμητή. Αυτός είναι ένας από τους βασικούς λόγους που στη μελέτη και υλοποίηση των αλγορίθμων που σχετίζονται με Γραφικά, καταφεύγουμε στην χρήση των ομογενών συντεταγμένων.

Οι *ομογενείς συντεταγμένες* είναι μια θεωρητική μαθηματική κατασκευή που συνοδεύει τους μετασχηματισμούς και απλοποιεί την έκφρασή τους. Αυτή ακριβώς η ιδιότητά τους είναι που εξυπηρετεί και τις παραπάνω ανάγκες. Στα πλαίσια των Γραφικών, αποτελούν επέκταση των τυπικών καρτεσιανών συντεταγμένων των 2 ή 3 διαστάσεων με μία επιπλέον τιμή, που συνήθως συμβολίζεται με w. Έτσι, ένα σημείο στο χώρο 2 διαστάσεων είναι πια P=(x,y,w) ενώ ένα σημείο στο χώρο των 3 διαστάσεων είναι Q=(x,y,z,w). Η αντιστοιχία μεταξύ των τιμών των ομογενών συντεταγμένων ενός σημείου με τις αντίστοιχες καρτεσιανές του είναι απλή αλλά και σημαντική στην υλοποίηση αλγορίθμων.

Έστω το σημείο του χώρου 2 διαστάσεων

$$P_c=(x,y)=(3,5).$$

Ένας απλός τρόπος να μετατρέψουμε τις συντεταγμένες του σε ομογενείς είναι να προσθέσουμε τη συνιστώσα w με τιμή 1, δηλαδή

$$P_h=(x,y,w)=(3,5,1)$$

Αντίστοιχα, στις 3 διαστάσεις, ένα σημείο

$$Q_c = (x,y,z) = (-2,7,3)$$

αντιστοιχίζεται στην αναπαράσταση

$$Q_h = (x,y,w,1) = (-2,7,3,1)$$

Αυτές οι αναπαραστάσεις των παραπάνω σημείων, όπου το w=1, δεν είναι οι μόνες δυνατές για αυτά τα σημεία. Η αληθινή ευελιξία που μας προσφέρουν οι ομογενείς συντεταγμένες προκύπτει από το γεγονός ότι ένα σημείο μπορεί να έχει πολλές αναπαραστάσεις. Συγκεκριμένα, για οποιοδήποτε σημείο το οποίο μας δίνεται με τη μορφή

$$R_h=(x,y,z,w),\ w\neq 0$$

οι καρτεσιανές συντεταγμένες του προκύπτουν διαιρώντας κάθε συντεταγμένη του x,y,z με την τιμή του w, δηλαδή:

$$R_c = (\frac{x}{w},\frac{y}{w},\frac{z}{w})$$

Υπό αυτό το πρίσμα, το σημείο $Q_c = (x,y,z) = (-2,7,3)$ μπορεί να εκφραστεί ή να προκύψει σε υπολογισμούς ως:

$$(-2,7,3,1)\ ,(-4,14,6,2),(20,-70,-30,-10),(-1,\frac{7}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}),\text{κλπ.}$$

Στα παραπάνω παραδείγματα υποθέσαμε ότι w≠0· αυτό δεν είναι απαραίτητο να ισχύει. Στην περίπτωση που το w=0, η αναπαράσταση αφορά ένα αντικείμενο που μπορούμε να θεωρούμε ότι βρίσκεται στο άπειρο, π.χ. για τα Γραφικά, μία πηγή φωτισμού. Πιο τυπικά, μηδενική τιμή του w υπονοεί το ελεύθερο διάνυσμα με τις αντίστοιχες x,y,z συντεταγμένες.

4.3.2 Μετασχηματισμοί σε 2 διαστάσεις

Με τη βοήθεια των ομογενών συντεταγμένων οι μετασχηματισμοί των 2 διαστάσεων μπορούν να οριστούν ως πίνακες 3×3 και η εφαρμογή τους να γίνεται πια με ενιαίο τρόπο: πολλαπλασιάζοντας με την έκφραση του κάθε σημείου σε ομογενείς συντεταγμένες.

Περιστροφή

Ο πίνακας του μετασχηματισμού περιστροφής πρακτικά επεκτείνεται με την τελευταία γραμμή και στήλη του μοναδιαίου πίνακα. Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας μετασχηματισμού περιστροφής **R(θ)** και η πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων

μεταξύ αυτού και ενός σημείου με ομογενείς συντεταγμένες όπου φαίνεται ότι προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα:

$$\boldsymbol{R(\theta)} \cdot P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{cos\theta} & \boldsymbol{-sin\theta} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{sin\theta} & \boldsymbol{cos\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x \cdot cos\theta - y \cdot sin\theta + 0 \cdot 1 \\ x \cdot sin\theta + y \cdot cos\theta + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot cos\theta - y \cdot sin\theta \\ x \cdot sin\theta + y \cdot cos\theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

Κλιμάκωση

Αντίστοιχα με την περιστροφή, ο πίνακας κλιμάκωσης επίσης επεκτείνεται με την τελευταία γραμμή και στήλη του μοναδιαίου πίνακα. Φαίνεται και πάλι ο πίνακας μετασχηματισμού κλιμάκωσης **S(s_x,s_y)** και η πράξη του πολλαπλασιασμού του μετασχηματισμού κλιμάκωσης με ένα σημείο εκφρασμένο σε ομογενείς συντεταγμένες:

$$\boldsymbol{S(s_x, s_y)} \cdot P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s_x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{s_y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot x + s_y \cdot y + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Μετακίνηση

Είναι αναμενόμενο, αφού ο μετασχηματισμός μετακίνησης είχε οριστεί ως πίνακας 2×1 και η σχετική πράξη ήταν πρόσθεση, να είναι αυτός που δεν ακολουθεί την παραπάνω λογική στην επέκταση του. Πρακτικά, είναι ο μετασχηματισμός όπου εκμεταλλευόμαστε την επιπλέον διάσταση των πινάκων προκειμένου, μέσω του πολλαπλασιασμού, να επιτύχουμε την πρόσθεση. Συγκεκριμένα, ο πίνακας μετασχηματισμού μετακίνησης **T(t_x,t_y)** και οι αντίστοιχες πράξεις στην προκειμένη περίπτωση είναι:

$$\boldsymbol{T(t_x, t_y)} \cdot P = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{t_x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{t_y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y + t_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + t_y \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι παράμετροι του μετασχηματισμού μετακίνησης, σε αντίθεση με τους προηγούμενους, βρίσκονται στην 3η στήλη: πρακτικά, αυτό μας επιτρέπει την πραγματοποίηση της άθροισης για την ενημέρωση των συντεταγμένων x,y με τις αντίστοιχες παραμέτρους t_x, t_y της μεταφοράς, μέσω του πολλαπλασιασμού πινάκων.

Διάτμηση

Τέλος, για τη διάτμηση που η εφαρμογή της ήταν ήδη μέσω πολλαπλασιασμού, ο πίνακας κλιμάκωσης επεκτείνεται και πάλι με την τελευταία γραμμή και στήλη του μοναδιαίου πίνακα. Παρακάτω δίνεται και πάλι ο πίνακας μετασχηματισμού διάτμησης για κάθε άξονα $\mathbf{SH_x(h_x)}$ και $\mathbf{SH_y(h_y)}$ αντίστοιχα καθώς η πράξη του πολλαπλασιασμού του μετασχηματισμού κλιμάκωσης με ένα σημείο εκφρασμένο σε ομογενείς συντεταγμένες:

$$\boldsymbol{SH_x(h_x)} \cdot P = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{h_x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x + h_x \cdot y + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + h_x \cdot y \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{SH_y(h_x)} \cdot P = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{h_y} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot 1 \\ h_y \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ h_y \cdot x + y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι σε κάποια σημεία της βιβλιογραφίας οι παραπάνω πίνακες συμβολίζονται με δείκτη τον άξονα της συντεταγμένης που *δεν* αλλοιώνεται, συνεπώς εδώ θα είχαν αντίστροφα ονόματα. Θα ξαναδούμε αυτό το ζήτημα και στις 3 διαστάσεις.

4.4 Μετασχηματισμοί σε 3 διαστάσεις

Η επέκταση της έκφρασης ενός σημείου του χώρου 3 διαστάσεων σε ομογενείς συντεταγμένες γίνεται με την απλή προσθήκη της z συντεταγμένης, καταλήγοντας έτσι σε μία τετράδα αριθμών και στον αντίστοιχο πίνακα 4×1 για τις πράξεις των μετασχηματισμών. Συγκεκριμένα για το P=(x,y,z,w) ο πίνακας είναι:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = [x \quad y \quad z \quad 1]^T$$

Στην παραπάνω αναπαράσταση δίνεται και ο πίνακας του σημείου σε ανάστροφη μορφή, όπως υποδεικνύεται από το T, για λόγους εξοικείωσης, μια και η μορφή αυτή συναντάται συχνά στη βιβλιογραφία, συνήθως για εξοικονόμηση κάθετου χώρου.

4.4.1 Μετασχηματισμός μετακίνησης

Οι πίνακες μετασχηματισμών κλιμάκωσης και μετακίνησης που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα επεκτείνονται και αυτοί άμεσα στις 3 διαστάσεις με την προσθήκη της αντίστοιχης γραμμής και στήλης για το z, καταλήγοντας έτσι σε πίνακες 4×4.

Συγκεκριμένα, η μετακίνηση στις 3 διαστάσεις γίνεται:

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Το πρακτικό αποτέλεσμα στις 3 διαστάσεις είναι και πάλι η μετακίνηση του σημείου (και, κατ' επέκταση του αντικειμένου) σε κάθε άξονα κατά όσο ορίζουν οι παράμετροι του μετασχηματισμού.

4.4.2 Μετασχηματισμός κλιμάκωσης

Ο πίνακας του μετασχηματισμού κλιμάκωσης στις 3 διαστάσεις επεκτείνεται με το ίδιο σκεπτικό:

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η κλιμάκωση στις 3 διαστάσεις ακολουθεί τη λογική που είδαμε στις 2 διαστάσεις: οι συντεταγμένες κάθε σημείου κλιμακώνονται κατά όσο υποδεικνύουν οι αντίστοιχοι συντελεστές. Όπως και στις 2 διαστάσεις, έτσι κι εδώ η κλιμάκωση επιφέρει έμμεση μετακίνηση για αντικείμενα που δεν είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα που κλιμακώνονται.

Επίσης, οι παρατηρήσεις που είχαμε κάνει σε προηγούμενη ενότητα σχετικά με ειδικές τιμές κλιμάκωσης ισχύουν και εδώ, επεκτεταμένες όμως στις 3 διαστάσεις. Συγκεκριμένα, μία αρνητική τιμή στο συντελεστή ενός άξονα προκαλεί κατοπτρισμό του αντικειμένου ως προς το *επίπεδο που ορίζουν οι άλλοι δύο άξονες*. Για παράδειγμα, για $s_x < 0$ έχουμε κατοπτρισμό του αντικειμένου ως προς το επίπεδο yz. Επίσης, μία μηδενική τιμή στο συντελεστή ενός άξονα, προκαλεί την προβολή του αντικειμένου *στο επίπεδο που ορίζουν οι άλλοι δύο άξονες*. Για παράδειγμα, εφαρμόζοντας μία κλιμάκωση όπου $s_z = 0$, θα έχουμε ένα αποτέλεσμα όπου όλες οι κορυφές του αντικειμένου θα έχουν προβληθεί στο επίπεδο xy (αφού θα έχουν πια όλες z=0), ανάγοντάς το σε ένα 2-διάστατο αντικείμενο.

4.4.3 Μετασχηματισμοί περιστροφής

Η περιστροφή αποτελεί εξαίρεση σε σχέση με τις επεκτάσεις των άλλων 2 στοιχειωδών μετασχηματισμών: για αυτήν έχουμε διαφορετικό πίνακα για την περιστροφή γύρω από κάθε άξονα αλλά κι εδώ η επέκταση περιλαμβάνει την προσθήκη γραμμής και στήλης.

Κατά την περιστροφή γύρω από έναν άξονα στις 3 διαστάσεις, το σημείο που περιστρέφεται συμπεριφέρεται ακριβώς όπως είδαμε στο παράδειγμα των 2 διαστάσεων, μόνο που αυτή τη φορά, το επίπεδο στο οποίο περιστρέφεται είναι εκείνο που είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής και περνά από την αντίστοιχη συντεταγμένη του σημείου. Για παράδειγμα, ένα σημείο που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα x και έχει x=2 θα περιστραφεί μέσα στο επίπεδο που είναι παράλληλο σε αυτό που ορίζεται από τους άξονες yz και το οποίο διέρχεται από το x=2. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η συντεταγμένη που είναι σχετική με τον άξονα περιστροφής δεν αλλάζει – αυτό άλλωστε σημαίνει το γεγονός ότι το σημείο περιστρέφεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής. Με άλλα λόγια, στο παραπάνω παράδειγμα, η συντεταγμένη x του σημείου θα παραμείνει 2.

Για να γίνει ακόμα πιο κατανοητή η περιστροφή στις 3 διαστάσεις, ας σκεφθούμε ως εξής: μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα σημεία 2 διαστάσεων της προηγούμενης ενότητας ήταν πρακτικά σημεία 3 διαστάσεων που όμως είχαν όλα z=0. Με αυτό το σκεπτικό, η περιστροφή στις 2 διαστάσεις που είδαμε, μπορεί να θεωρηθεί περιστροφή στις 3 διαστάσεις, γύρω από τον άξονα z, η οποία συμβαίνει στο επίπεδο xy (που ορίζουν οι άλλοι 2 άξονες) και περνά από το z=0 (αφού όλα τα σημεία που μας απασχολούσαν είχαν z=0). Και βέβαια, όλα τα σημεία παραμένουν στο επίπεδο και εξακολουθούν να έχουν z=0.

Τέλος, κατά την περιστροφή, ως θετική φορά νοείται αυτή που θα οδηγούσε έναν δεξιόστροφο κοχλία προς τη θετική φορά του άξονα στον οποίο αναφέρεται η περιστροφή, αν περιστρέφαμε το θετικό μέρος του ενός (συγκεκριμένου) από τους άλλους 2 άξονες γύρω από την αρχή των αξόνων ώστε να συναντήσει το θετικό μέρος του τρίτου άξονα (μέσω της γωνίας 90 μοιρών μεταξύ τους). Ο δεξιόστροφος κοχλίας κινείται προς την κατεύθυνση που δείχνει ο τεντωμένος αντίχειράς μας όταν ακολουθούμε τη φυσική κυκλική θέση των υπόλοιπων δακτύλων μας στο δεξί μας χέρι.

Πιο συγκεκριμένα, κατά την περιστροφή γύρω από τον x, θετική φορά είναι αυτή που θα οδηγούσε περιστροφικά το θετικό τμήμα του y προς το θετικό τμήμα του z. Κατά την περιστροφή γύρω από τον y, θετική φορά είναι αυτή που θα οδηγούσε το θετικό τμήμα του z προς το θετικό τμήμα του x. Τέλος, κατά την περιστροφή γύρω

από τον z, θετική φορά είναι αυτή που ήδη μας είναι οικεία από τις 2 διαστάσεις και οδηγεί τη θετική φορά του x προς τη θετική φορά του y.

Με βάση και τα παραπάνω, ο πίνακας μετασχηματισμού περιστροφής ως προς τον άξονα z είναι άμεση επέκταση του μετασχηματισμού περιστροφής 2 διαστάσεων. Για τις 3 διαστάσεις στο συμβολισμό κάθε μετασχηματισμού περιλαμβάνεται ο άξονας περιστροφής. Άρα ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός συμβολίζεται με $R_z(\theta)$ και ο αντίστοιχος πίνακας είναι:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για την περιστροφή γύρω από τον άξονα x οι παράμετροι αλλάζουν θέσεις, αντικατοπτρίζοντας το διαφορετικό άξονα:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta & 0 \\ 0 & sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παρόμοια για την περιστροφή γύρω από y. Παρατηρήστε τη μικρή αλλαγή στα πρόσημα των παραμέτρων:

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πώς, με τη βοήθεια των στοιχειωδών μετασχηματισμών μετακίνησης, κλιμάκωσης και περιστροφής και της σύνθεσής τους, μπορούμε να πραγματοποιήσουμε πιο πολύπλοκες τροποποιήσεις στα αντικείμενά μας και τις θέσεις τους.

4.4.4 Μετασχηματισμοί διάτμησης

Η προσθήκη ακόμα μίας διάστασης θεωρητικά θα οδηγούσε σε δύο εναλλακτικά σενάρια για τη γενίκευση της διάτμησης: (α) αλλοίωση της μίας συντεταγμένης ανάλογα με τις τιμές των άλλων δύο, αφήνοντας δύο συντεταγμένες αναλλοίωτες ή (β) αλλοίωση δύο συντεταγμένων ανάλογα με την τιμή της μίας που παραμένει αναλλοίωτη. Κατά σύμβαση, η διάτμηση στις 3 διαστάσεις ακολουθεί το σενάριο (β). Πιο τυπικά, έχουμε πια διάτμηση ως προς *επίπεδο* που αντιστοιχεί στο συνδυασμό δύο αξόνων, υπονοώντας την αλλοίωση των συντεταγμένων του σημείου ως προς

τους άξονες που ορίζουν το επίπεδο. Η αλλοίωση αυτή μπορεί να εκφραστεί μέσω ενός πίνακα με 2 συντελεστές πια, έναν για κάθε συντεταγμένη που αλλοιώνεται. Οδηγούμαστε σε 3 διαφορετικούς πίνακες, έναν για κάθε επίπεδο από τα xy, yz και xz αντίστοιχα. Αξίζει να δούμε πιο προσεκτικά τη λειτουργία του μετασχηματισμού αλλά και στη σχετική ονοματολογία των αντίστοιχων πινάκων.

Θα ξεκινήσουμε τη συζήτησή μας από τη διάτμηση ως προς το επίπεδο yz. Για το επίπεδο yz, ο μετασχηματισμός επηρεάζει πια τις συντεταγμένες y και z, ανάλογα με την τιμή της τρίτης συντεταγμένης, εδώ της x. Συνακόλουθα, έχουμε πια 2 συντελεστές διάτμησης, έναν συντελεστή για κάθε έναν από τους 2 άξονες του επιπέδου. Ο σχετικός πίνακας είναι:

$$SH_{yz}(h_y, h_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_y & 1 & 0 & 0 \\ h_z & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Το αποτέλεσμα του συγκεκριμένου μετασχηματισμού όταν εφαρμόζεται σε ένα σημείο του τρισδιάστατου χώρου φαίνεται παρακάτω:

$$SH_{yz}(h_y, h_z) \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_y & 1 & 0 & 0 \\ h_z & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ h_y \cdot x + y \\ h_z \cdot x + \mathrm{z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Σε συνέχεια της συζήτησης για την εναλλακτική ονοματολογία των πινάκων, αν ακολουθούσαμε τη σύμβαση για χρήση ως δείκτη της συντεταγμένης που *δεν* αλλοιώνεται, ο παραπάνω πίνακας θα συμβολιζόταν ως SH_x αφού η x συντεταγμένη είναι αυτή που δεν αλλοιώνεται στην προκειμένη περίπτωση. Στο παρόν, προτιμήθηκε η ονοματοδοσία που βασίζεται στις συντεταγμένες που αλλοιώνονται, ως περισσότερο διαισθητική.

Οι αντίστοιχοι πίνακες διάτμησης για τα επίπεδα xy και xz ακολουθούν.

$$SH_{xy}(h_x, h_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h_x & 0 \\ 0 & 1 & h_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; SH_{xz}(h_x, h_z) = \begin{bmatrix} 1 & h_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & h_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.5 Αντικείμενο ως ενιαίος πίνακας

Είδαμε στα προηγούμενα πως η εφαρμογή ενός μετασχηματισμού σε ένα πολυγωνικό αντικείμενο το οποίο ορίζεται από ένα σύνολο κορυφών αποτελεί πρακτικά την εφαρμογή του μετασχηματισμού σε κάθε κορυφή του αντικειμένου ξεχωριστά. Η εφαρμογή αυτή γίνεται μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να περιστρέψουμε ένα αντικείμενο που αποτελείται από τις κορυφές ΑΒΓΔΕ γύρω από τον άξονα x κατά π/2, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε κάθε κορυφή του με το $R_x(\pi/2)$. Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε είτε με μεμονωμένους πολλαπλασιασμούς πινάκων, π.χ.

$$A' = R_x(\pi/2)\cdot A$$
$$B' = R_x(\pi/2)\cdot B$$
$$\Gamma' = R_x(\pi/2)\cdot \Gamma$$
$$\Delta' = R_x(\pi/2)\cdot \Delta$$
$$E' = R_x(\pi/2)\cdot E$$

είτε συνθέτοντας έναν πίνακα που περιέχει όλες τις κορυφές του αντικειμένου και, στη συνέχεια, πολλαπλασιάζοντας αυτόν τον πίνακα με το μετασχηματισμό. Συγκεκριμένα, για το αντικείμενο Π=ΑΒΓΔΕ, ο πίνακας αυτός θα ήταν:

$$\Pi = \begin{bmatrix} x_A & x_B & x_\Gamma & x_\Delta & x_E \\ y_A & y_B & y_\Gamma & y_\Delta & y_E \\ z_A & z_B & z_\Gamma & z_\Delta & z_E \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Όπως παρατηρούμε, οι συντεταγμένες κάθε κορυφής του αντικειμένου έχουν τοποθετηθεί σε αντίστοιχες στήλες του πίνακα. Το γινόμενο υπολογισμού της νέας θέσης των κορυφών γίνεται:

$$\Pi' = R_x(\pi/2)\cdot \Pi$$

Ο πίνακας είναι διαστάσεων 4×5 συνεπώς το γινόμενο ορίζεται χωρίς πρόβλημα. Αυτό ισχύει για οποιοδήποτε μη μηδενικό πλήθος κορυφών αφού αυτό θα άλλαζε μόνο το πλήθος των στηλών του δεύτερου πίνακα του γινομένου.

Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι στο αποτέλεσμα Π' κάθε στήλη είναι η νέα θέση της αντίστοιχης κορυφής του αρχικού πίνακα. Ο συγκεκριμένος τρόπος αφορά τη συνολική αναπαράσταση της εφαρμογής του μετασχηματισμού σε ένα ολόκληρο αντικείμενο. Παρόλα αυτά, από υπολογιστικής άποψης, δεν αλλάζει κάτι αφού ο μετασχηματισμός (και το αντίστοιχο γινόμενο) εξακολουθεί να υπολογίζεται για κάθε κορυφή ξεχωριστά. Πρόκειται, πρακτικά, για μια ομαδοποίηση (και όχι ελάττωση ή απλοποίηση) των υπολογισμών.

4.6 Σύμβαση δομής πινάκων και ακολουθίας υπολογισμών

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο, αξίζει να σημειώσουμε ακόμα μία σύμβαση που ακολουθήθηκε στο παρόν και εμφανίζεται και με διαφορετικό τρόπο σε κάποια σημεία ιδίως της παλαιότερης βιβλιογραφίας. Η συγκεκριμένη σύμβαση αφορά την έκφραση των σημείων, επηρεάζει την έκφραση των πινάκων των μετασχηματισμών αλλά, συνακόλουθα, και τη ροή των πράξεων μεταξύ των πινάκων.

Συγκεκριμένα, για την απεικόνιση ενός σημείου, έστω εκφρασμένου σε ομογενείς συντεταγμένες στις 2 διαστάσεις (x,y,w), προτιμήθηκε η αναπαράσταση ως πίνακα στήλης, π.χ.

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Μια εναλλακτική πολιτική ξεκινά με την αναπαράσταση του σημείου ως πίνακα γραμμής:

$$P_\varepsilon = [x \quad y \quad 1] = P^T$$

Δεδομένου ότι ο πίνακας του σημείου είναι τώρα 1×3, οι πίνακες μετασχηματισμού, ως πίνακες 3×3, θα πρέπει να πολλαπλασιαστούν με αυτό από δεξιά για να ορίζεται η πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων. Επιπλέον, για να έχουμε το ίδιο μαθηματικό αποτέλεσμα, ως προς τις νέες συντεταγμένες του σημείου μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού, οι πίνακες των μετασχηματισμών που είδαμε στα παραπάνω θα πρέπει σε αυτήν την περίπτωση να είναι ανάστροφοι.

Για παράδειγμα, η μετακίνηση ενός σημείου κατά 2 ως προς τον άξονα x και κατά 3 ως προς τον άξονα y θα εκφραστεί ως:

$$T_\varepsilon(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = T^T(2,3)$$

Ώστε ο πολλαπλασιασμός με το σημείο να οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα:

$$P_\varepsilon \cdot T_\varepsilon(2,3) = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot 1 + y \cdot 0 + 1 \cdot 2 \\ x \cdot 0 + y \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ x \cdot 0 + y \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2 \\ y + 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.7 TL;DR

- Οι τυπικοί στοιχειώδεις μετασχηματισμοί που χρησιμοποιούμε περιλαμβάνουν την περιστροφή, την κλιμάκωση, τη μετακίνηση και τη διάτμηση.
- Οι μετασχηματισμοί αυτοί εφαρμόζονται σε κάθε κορυφή ενός πολυγώνου (στερεού, κλπ.) ξεχωριστά.
- Παρόλα αυτά αποκομίζουμε την αίσθηση ότι ο μετασχηματισμός εφαρμόστηκε συνολικά στο πολύγωνο/στερεό κλπ.
- Οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί που χρησιμοποιούμε είναι συσχετισμένοι μετασχηματισμοί και διατηρούν βασικές γεωμετρικές ιδιότητες των αντικειμένων αναλλοίωτες.
- Η κλιμάκωση μπορεί να προκαλέσει «παράπλευρη» μετακίνηση.
- Το ουδέτερο στοιχείο για τη μετακίνηση είναι το 0.
- Το ουδέτερο στοιχείο για την περιστροφή είναι το 0.
- Το ουδέτερο στοιχείο για την κλιμάκωση είναι το 1.
- Το ουδέτερο στοιχείο για τη διάτμηση είναι το 0.
- Μηδενική κλιμάκωση σε έναν άξονα οδηγεί σε μηδενισμό της αντίστοιχης συντεταγμένης: προβολή στον άλλο άξονα (2 διαστάσεις) ή στο επίπεδο των άλλων 2 αξόνων (3 διαστάσεις).
- Αρνητικό πρόσημο στην κλιμάκωση θα αλλάξει το ημιεπίπεδό (2 διαστάσεις) ή τον ημιχώρο (3 διαστάσεις) του σημείου = Mirroring.
- Στις 2 διαστάσεις ορίζεται ένας μετασχηματισμός περιστροφής ενώ στις 3 διαστάσεις ορίζεται 3 διαφορετικοί μετασχηματισμοί περιστροφής, 1 για κάθε άξονα.
- Η περιστροφή σημείου γύρω από έναν άξονα γίνεται σε επίπεδο παράλληλο με αυτό που ορίζουν οι άλλοι 2 άξονες γύρω από την αρχή (αυτών) των (άλλων 2) αξόνων - *η συντεταγμένη του σημείου ως προς τον άξονα περιστροφής δεν αλλάζει.*
- Στις 2 διαστάσεις ο μετασχηματισμός διάτμησης αλλοιώνει τη μία συντεταγμένη σε αναλογία με την τιμή της άλλης και το σχετικό συντελεστή διάτμησης ενώ στις 3 διαστάσεις αλλοιώνονται 2 συντεταγμένες σε αναλογία με την τιμή της άλλης και τους αντίστοιχους συντελεστές διάτμησης.

4.8 Ασκήσεις

1. Η περιστροφή ενός σημείου $A(x, y)$ κατά $\frac{\pi}{2}$ στο επίπεδο xy, οδηγεί στις συντεταγμένες $A'(-y, x)$, π.χ. το σημείο $A(-3,4)$ θα καταλήξει στο σημείο $A'(-4, -3)$. Δώστε αντίστοιχους άμεσους τύπους για τον υπολογισμό χωρίς πράξεις πινάκων των συντεταγμένων ενός σημείου A(x,y) μετά από μεμονωμένη περιστροφή στο επίπεδο xy κατά $-\frac{\pi}{2}$ ή κατά π. Χρησιμοποιώντας ομογενείς συντεταγμένες, επαληθεύστε τους τύπους που δώσατε υπολογίζοντας τα γινόμενα $R(-\frac{\pi}{2}) \cdot A$ και $R(\pi) \cdot A$.

2. Παρόμοια με την προηγούμενη άσκηση, δώστε άμεσους τύπους, ξεκινώντας κάθε φορά από τις συντεταγμένες ενός σημείου $A(x, y, z)$, μετά τη μεμονωμένη περιστροφή του στον τρισδιάστατο χώρο xyz κατά $R_x\left(-\frac{\pi}{2}\right), R_x(\pi), R_x\left(\frac{\pi}{2}\right), R_y\left(-\frac{\pi}{2}\right), R_y(\pi), R_y\left(\frac{\pi}{2}\right), R_z\left(-\frac{\pi}{2}\right), R_z(\pi), R_z\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Χρησιμοποιώντας ομογενείς συντεταγμένες, επαληθεύστε τους τύπους που δώσατε υπολογίζοντας το αντίστοιχο γινόμενο πινάκων της κάθε μεμονωμένης περιστροφής με το A.

3. Παρόμοια με την προηγούμενη άσκηση, δώστε άμεσους τύπους για τον υπολογισμό των συντεταγμένων ενός σημείου $A(x, y)$ μετά τη μετακίνησή του στο επίπεδο xy σύμφωνα με τον στοιχειώδη μετασχηματισμό μετακίνησης $T(t_x, t_y)$ καθώς και σύμφωνα με τον στοιχειώδη μετασχηματισμό κλιμάκωσης $S(s_x, s_y)$. Χρησιμοποιώντας ομογενείς συντεταγμένες, επαληθεύστε τους τύπους που δώσατε υπολογίζοντας τα γινόμενα $T(t_x, t_y) \cdot A$ και $S(s_x, s_y) \cdot A$.

4. Επαναλάβατε την άσκηση 3 για μετακίνηση και κλιμάκωση σημείου στον τρισδιάστατο χώρο xyz.

5. Η διάτμηση φαίνεται να αλλοιώνει τις γωνίες ενός αντικειμένου/πολυγώνου στο επίπεδο xy. Υπάρχει άλλος στοιχειώδης μετασχηματισμός που θα μπορούσε να αλλοιώσει τις γωνίες ενός αντικειμένου; Αν υπάρχει, δώστε συγκεκριμένο παράδειγμα ορίζοντας, με αριθμητικές συντεταγμένες, ένα απλό πολύγωνο και δίνοντας έναν αριθμητικά ορισμένο στοιχειώδη μετασχηματισμό.

6. Κάποιος ισχυρίζεται ότι δύο αρχικά παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα ενός αντικειμένου/πολυγώνου, μπορεί να μην είναι παράλληλα μετά από την εφαρμογή κάποιας εκδοχής κάποιου στοιχειώδους μετασχηματισμού. Είναι δυνατόν να λέει αλή-

θεια; Δικαιολογήστε μαθηματικά την απάντησή σας για κάθε στοιχειώδη μετασχηματισμό. *(Υπενθύμιση: η κλίση ενός ευθύγραμμου τμήματος δίνεται από το λόγο* $\Delta y/\Delta x$ *των συντεταγμένων των άκρων του, όταν* $\Delta x \neq 0$*).*

7. Κάποιος ισχυρίζεται ότι ο κατοπτρισμός ενός δισδιάστατου αντικειμένου στο επίπεδο xy ως προς κάποιον άξονα μπορεί να εκφραστεί και ως στοιχειώδης περιστροφή στο επίπεδο xy. Συμφωνείτε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

8. Κάποιος ισχυρίζεται ότι ο κατοπτρισμός ενός *δισδιάστατου* αντικειμένου στον *τρισδιάστατο* χώρο xyz ως προς κάποιο από τα επίπεδα που ορίζουν οι άξονες μπορεί να εκφραστεί ως στοιχειώδης τρισδιάστατη περιστροφή γύρω από κάποιον από τους άξονες. Συμφωνείτε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

9. Κάποιος ισχυρίζεται ότι ο κατοπτρισμός ενός *τρισδιάστατου* αντικειμένου στον *τρισδιάστατο* χώρο xyz ως προς κάποιο από τα επίπεδα που ορίζουν οι άξονες μπορεί να εκφραστεί ως στοιχειώδης τρισδιάστατη περιστροφή γύρω από κάποιον από τους άξονες. Συμφωνείτε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

10. Οι ομογενείς συντεταγμένες (x,y,z,w)=(0,2,2,2) αντιπροσωπεύουν στον τρισδιάστατο χώρο (επιλέξτε μία απάντηση):
(α) το σημείο (x,y,z)=(2,2,2), (β) το σημείο (x,y,z)=(1,1,1), (γ) το ελεύθερο διάνυσμα (x,y,z)=(2,2,2), (δ) το ελεύθερο διάνυσμα (x,y,z)=(0,2,2), (ε) το σημείο (x,y,z)=(0,2,2), (στ) το σημείο (x,y,z)=(0,1,1), (ζ) κανένα από τα προηγούμενα

11. Οι ομογενείς συντεταγμένες (xh,yh,zh,wh) σε σχέση με τις καρτεσιανές συντεταγμένες (xc, yc, zc) στα Γραφικά (επιλέξτε μια απάντηση):
(α) εξασφαλίζουν εξοικονόμηση χώρου στην αποθήκευση των συντεταγμένων, (β) προσφέρουν ομογενοποίηση της απαιτούμενης ακρίβειας στην αποθήκευση των τιμών των συντεταγμένων, (γ) εξασφαλίζουν ομογενοποίηση των πράξεων πινάκων στους μετασχηματισμούς, (δ) προσφέρουν ομογενοποίηση του τρισδιάστατου με τον δισδιάστατο χώρο, (ε) εξασφαλίζουν ομογενοποίηση του χώρου των αντικειμένων με το χώρο του παρατηρητή, (στ) προσφέρουν ομογενοποίηση όλων των στοιχειωδών αντικειμένων σε τρίγωνα

12. Να αναφέρετε το κυριότερο πλεονέκτημα και το κυριότερο μειονέκτημα των ομογενών συντεταγμένων.

13. Γράψτε ένα πρόγραμμα που μετατρέπει μία ακολουθία εισόδου (ή αρχείο) σημείων που δίνονται σε ομογενείς συντεταγμένες στην καρτεσιανή τους μορφή.

14. Γράψτε ένα πρόγραμμα που σε μία ακολουθία εισόδου (ή αρχείο) σημείων που δίνονται σε ομογενείς συντεταγμένες εντοπίζει αυτά που αντιπροσωπεύουν το ίδιο σημείο στο χώρο.

15. Γράψτε ένα πρόγραμμα που μετατρέπει μία ακολουθία εισόδου (ή αρχείο) σημείων που δίνονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο xy στις αντίστοιχες πολικές συντεταγμένες.