

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση και Θεωρία Γραφημάτων

Ιωάννης Μαρινάκης

Μαγδαληνή Μαρινάκη

Αθανάσιος Μυγδαλής

ΧΑΝΙΑ, 25 Ιουλίου 2023

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	13
1.1	Επιχειρησιακή Έρευνα	14
1.2	Μαθηματικός Προγραμματισμός	14
1.2.1	Προτυποποίηση Προβλημάτων	14
1.2.2	Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού (Linear Programming Problems)	14
1.2.3	Προβλήματα Μη - Γραμμικού Προγραμματισμού (Non-Linear Programming Problems-NLP)	14
1.2.4	Προβλήματα Ακεραίου Προγραμματισμού (Integer Programming Problems)	14
1.2.5	Προβλήματα Τετραγωνικού Προγραμματισμού (Quadratic Programming Problems)	14
1.2.6	Προβλήματα Στοχαστικού Προγραμματισμού (Stochastic Programming Problem)	14
1.2.7	Προβλήματα Πολυκριτηρίου Προγραμματισμού (Multi-objective Programming Problem)	14
1.3	Συνδυαστική Βελτιστοποίηση	14
1.3.1	Πρόβλημα Εκχώρησης ή Ανάθεσης (Assignment Problem)	14
1.3.2	Το Πρόβλημα της Ικανοποίησης (Satisfiability Problem)	14
1.3.3	Το Πρόβλημα του Σακιδίου (The Knapsack Problem)	14
1.3.4	Το Πρόβλημα των Πολλαπλών Σακιδίων (Multiple Knapsack Problem)	14
1.3.5	Το Γενικευμένο Πρόβλημα Εκχώρησης (Generalized Assignment Problem - GAP)	14
1.3.6	Το Πρόβλημα Συσκευασίας σε Κουτιά (Bin packing problem)	14
2	Στοιχεία από τη Θεωρία Γραφημάτων	15

2.1	Εισαγωγή στη Θεωρία Γραφημάτων - Βασικές έννοιες της θεωρίας γραφημάτων	16
2.1.1	Προσανατολισμένο Γράφημα	16
2.1.2	Υπογραφήματα (Subgraphs) ή Μερικά Γραφήματα (Partial Graphs)	16
2.2	Διαδρομές και συνεκτικότητα	16
2.2.1	Τομές και συνεκτικότητα	16
2.2.2	Επαναπροσανατολισμός γραφήματος	16
2.3	Διμελή και Επίπεδα Γραφήματα	16
2.4	Κύκλοι και διαδρομές Euler και Hamilton	16
2.5	Δένδρα και δάση	16
2.6	Ανεξαρτησία, Κυριαρχία και Κάλυψη	16
2.7	Μήτρες και διανύσματα	16
2.8	Ροές σε γραφήματα	16
3	Παραδείγματα Προτυποποίησης Προβλημάτων Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης	17
3.1	Παραδείγματα Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης	18
3.1.1	Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path Problem)	18
3.1.2	Το πρόβλημα ροής ελαχίστου κόστους (Minimum Cost Flow Problem)	18
3.1.3	Το πρόβλημα της μέγιστης ροής (Maximum Flow Problem)	18
3.1.4	Το πρόβλημα του ελάχιστου τανύοντος δένδρου (Minimum Spanning Tree)	18
3.1.5	Το πρόβλημα του μέγιστου τανύοντος δένδρου (Maximum Spanning Tree)	18
3.1.6	Το πρόβλημα της Σύζευξης (Matching)	18
3.1.7	Το πρόβλημα του χρωματισμού (Coloring Problem)	18
3.1.8	Το πρόβλημα της μεταφοράς (Transportation Problem)	18
3.1.9	Το πρόβλημα των πολυροών εμπορευμάτων σε δίκτυα (Multicommodity Flow Problem)	18
3.1.10	Το πρόβλημα της μέγιστης κλίκας γραφήματος (Maximum clique)	18
3.1.11	Το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (Traveling Salesman Problem -TSP)	18
3.1.12	Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (Vehicle Routing Problem -VRP)	18

3.1.13 Το πρόβλημα του Κινέζου ταχυδρόμου (Chinese Postman Problem)	18
3.1.14 Το πρόβλημα του σχεδιασμού δικτύου (Network Design)	18
3.1.15 Το πρόβλημα του προγραμματισμού πληρωμάτων (Crew Scheduling Problem)	18
3.2 Ασκήσεις	18
4 Αλγοριθμική Πολυπλοκότητα	19
4.1 Εισαγωγή	19
4.2 Η έννοια του αλγορίθμου	19
4.3 Ασυμπτωτικές σχέσεις συναρτήσεων	19
4.4 Πρόβλημα, υπόδειγμα και μέγεθος δεδομένων	19
4.5 Πολυπλοκότητα	19
4.6 Συγκρίσεις αλγορίθμων	19
4.7 Ασκήσεις και Προβλήματα	19
5 Ταξινόμηση Προβλημάτων	21
5.1 Εισαγωγή	21
5.2 Μορφές προβλήματος συνδυαστικής βελτιστοποίησης	21
5.3 Οι τάξεις \mathcal{P} , \mathcal{NP} και $\text{Co} - \mathcal{NP}$	21
5.4 Μη-αιτιοκρατικοί πολυωνυμικοί αλγόριθμοι	21
5.5 Πολυωνυμικός μετασχηματισμός και πολυωνυμική αναγωγή	21
5.6 \mathcal{NP} -πλήρη και \mathcal{NP} -δύσκολα προβλήματα	21
5.7 Μικρός κατάλογος γνωστών \mathcal{NPC} -προβλημάτων	21
5.8 Ασκήσεις και Προβλήματα	21
6 Δομές Δεδομένων	23
6.1 Στοιχειώδεις αφηρημένες δομές	24
6.1.1 Διακριτό σύνολο	24
6.1.2 Απεικόνιση	24
6.1.3 Κατάλογος ή γραμμική λίστα	24
6.1.4 Στοίβα και ουρά	24
6.2 Υλοποίηση στοιχειωδών δομών	24
6.2.1 Υλοποίηση διακριτού συνόλου	24
6.2.2 Υλοποίηση απεικόνισης	24
6.2.3 Υλοποίηση Στοίβας	24
6.2.4 Υλοποίηση ουράς	24
6.3 Δομές δένδρων	24
6.3.1 Διαζευκτικά διακριτά σύνολα	24

6.3.2	Ουρά προτεραιότητας και σωρός	24
6.3.3	Υλοποίηση σωρού με απλή παράταξη ως πλήρες δυαδικό δένδρο	24
6.3.4	Αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη n τιμών (Heapsort) . . .	24
6.4	Δομές δεδομένων για γραφήματα	24
7	Ανίχνευση Γραφημάτων	25
7.1	Εισαγωγή	26
7.2	Πρόβλημα Πρόσβασης (ΠΠ)	26
7.3	Πρόβλημα Διαδρομής (ΠΔ)	26
7.4	Πρόβλημα Διαχωριστικής Τομής (ΠΔΤ)	26
7.5	Δομή δεδομένων στοιβά	26
7.6	Δομή δεδομένων ουρά	26
7.7	Ανίχνευση πρώτα κατά βάθος DFS	26
7.8	Ανίχνευση πρώτα κατά πλάτος BFS	26
7.9	Ανίχνευση κατά πλάτος BS	26
7.10	Ανίχνευση κατά βάθος DS	26
7.11	Τοπολογική διάταξη γραφήματος	26
7.12	Ασκήσεις	26
8	Αλγόριθμος διακλάδωσης και οριοθέτησης	27
8.1	Εισαγωγή	28
8.2	Η διαδικασία διακλάδωσης και οριοθέτησης με τη χρήση χαλαρωμένου προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού . . .	28
8.2.1	Κριτήρια διακοπής της ανάπτυξης του δένδρου απαρίθμησης	28
8.2.2	Υποδιαίρεσεις	28
8.2.3	Επιλογή κόμβων	28
8.2.4	Επιλογή μεταβλητής διακλάδωσης	28
8.3	Επίλυση του προβλήματος της Αλληλουχίας Εργασιών με τη χρήση του Αλγόριθμου Διακλάδωσης και Οριοθέτησης . . .	28
8.4	Επίλυση του προβλήματος του Σακιδίου με τη χρήση του Αλγόριθμου Διακλάδωσης και Οριοθέτησης	28
8.5	Επίλυση του προβλήματος του πλανόδιου πωλητή με τη χρήση του Αλγόριθμου Διακλάδωσης και Οριοθέτησης	28
8.6	Ασκήσεις	28
9	Οπισθοίχνηλασία	29
9.1	Εισαγωγή	29

9.2	Επίλυση του προβλήματος του χρωματισμού γραφήματος με τη χρήση του αλγορίθμου της οπισθοϊχνηλασίας	29
9.3	Επίλυση του προβλήματος των n -βασιλισσών με τη χρήση του αλγορίθμου της οπισθοϊχνηλασίας	29
10	Πρόβλημα Εύρεσης Συντομότερης Διαδρομής	31
10.1	Εισαγωγή	31
10.2	Μορφοποίηση του προβλήματος εύρεσης συντομότερης διαδρομής	31
10.3	Ανάλυση αλγορίθμων επίλυσης προβλημάτων εύρεσης συντομότερης διαδρομής	31
10.4	Προβλήματα του Dijkstra με τη χρήση αρνητικών τόξων και ο αλγόριθμος Ford	31
10.5	Ο αλγόριθμος Floyd-Warshall	31
10.6	Ασκήσεις	31
11	Διακριτός Δυναμικός Προγραμματισμός	33
11.1	Εισαγωγή	34
11.2	Επίλυση του προβλήματος της Εύρεσης της Συντομότερης Διαδρομής με τη χρήση Διακριτού Δυναμικού Προγραμματισμού	34
11.3	Επίλυση του προβλήματος του Σακιδίου με τη χρήση Διακριτού Δυναμικού Προγραμματισμού	34
11.4	Επίλυση του Προβλήματος του Πλανόδιου Πωλητή με τη χρήση Διακριτού Δυναμικού Προγραμματισμού	34
11.5	Επίλυση του Στοχαστικού Προβλήματος της Εύρεσης της Συντομότερης Διαδρομής τη χρήση Διακριτού Δυναμικού Προγραμματισμού	34
11.6	Επίλυση του Προβλήματος της Αντικατάστασης Εργαλείων με τη χρήση Διακριτού Δυναμικού Προγραμματισμού	34
11.7	Επίλυση του Προβλήματος της κατανομής πόρων με τη χρήση Διακριτού Δυναμικού Προγραμματισμού	34
11.8	Ασκήσεις	34
12	Το Πρόβλημα της Μέγιστης Ροής	35
12.1	Εισαγωγή	35
12.2	Μορφοποίηση προβλήματος	35
12.3	Αλγοριθμική επίλυση προβλήματος	35
12.4	Ο αλγόριθμος Dinic	35

12.5 Ασκήσεις	35
13 Πρόβλημα Ροής Ελαχίστου Κόστους	37
13.1 Εισαγωγή	37
13.2 Αλγόριθμος Κατάργησης Κυκλικών Διαδρομών (Cycle Cancelling Algorithm)	37
13.3 Αλγόριθμος διαδοχικών συντομότερων διαδρομών (Successive Shortest Path)	37
14 ο Αλγόριθμος Simplex για δίκτυα	39
14.1 Εισαγωγή	39
14.2 Εισαγωγή στη μέθοδο Simplex	39
14.3 Η μέθοδος Simplex για δίκτυα	39
14.4 Επίλυση του προβλήματος ροής ελαχίστου κόστους με τη μέθοδο Simplex για δίκτυα	39
15 Ελάχιστα τανύοντα δένδρα	41
15.1 Εισαγωγή	42
15.2 Μορφοποίηση προβλήματος - Μαθηματικά πρότυπα για το πρόβλημα MST	42
15.3 Ο αλγόριθμος PRIM	42
15.4 Ο αλγόριθμος Kruskall	42
15.5 Ο αλγόριθμος Solin-Boruvnska	42
15.6 Πολυπλοκότητα αλγορίθμων	42
15.7 Αλγόριθμος εύρεσης διακλάδωσης μεγίστου κόστους	42
15.8 Μητροειδή προβλήματα και αλγόριθμοι απληστίας	42
15.9 Μητροειδή	42
15.10 Τομή μητροειδών	42
15.11 Ασκήσεις	42
16 Τα προβλήματα της Μεταφοράς και της Ανάθεσης	43
16.1 Εισαγωγή	43
16.2 Το πρόβλημα της Μεταφοράς	43
16.3 Αλγοριθμική Επίλυση του Προβλήματος της Μεταφοράς	43
16.4 Το πρόβλημα της Ανάθεσης	43
16.5 Αλγοριθμική Επίλυση του Προβλήματος της Ανάθεσης	43
17 Το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή	45
17.1 Εισαγωγή	46
17.2 Μοντελοποίηση του Προβλήματος του Πλανόδιου Πωλητή	46

<i>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</i>	9
17.3 Ακριβείς Αλγόριθμοι για την Επίλυση του Προβλήματος του Πλανόδιου Πωλητή	46
17.4 Ευρετικοί Αλγόριθμοι για την Επίλυση του Προβλήματος του Πλανόδιου Πωλητή	46
17.5 Αλγόριθμοι Τοπικής Αναζήτησης για την Επίλυση του Προβλήματος του Πλανόδιου Πωλητή	46
17.6 Μεθευρετικοί Αλγόριθμοι για την Επίλυση του Προβλήματος του Πλανόδιου Πωλητή	46
17.7 Εξελικτικοί Αλγόριθμοι για την Επίλυση του Προβλήματος του Πλανόδιου Πωλητή	46
17.8 Αλγόριθμοι Εμπνευσμένοι από τη Φύση για την Επίλυση του Προβλήματος του Πλανόδιου Πωλητή	46
18 Βιβλιογραφία	47