ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ

3.1 Εισαγωγή

Η σχεδίαση των ψηφιακών συστημάτων βασίζεται θεωρητικά στην Άλγεβρα Διακοπτών (Switching Algebra). Η Άλγεβρα Διακοπτών είναι μία ειδική περίπτωση της Άλγεβρας Boole (Boolean Algebra). Η Άλγεβρα Boole παρουσιάσθηκε για πρώτη φορά από τον Άγγλο Μαθηματικό George Boole το έτος 1848 στο δοκίμιό του "The Mathematical Analysis of Logic" και στη συνέχεια το 1854 στο βιβλίο του "An Investigation of the Laws of Thought", σαν μαθηματικό εργαλείο για την περιγραφή των νόμων της λογικής. Η πρώτη εφαρμογή της Άλγεβρας Boole στη σχεδίαση λογικών κυκλωμάτων έγινε το 1938, από τον Claude Shannon. Στην ουσία ο Shannon χρησιμοποίησε μία δίτιμη Άλγεβρα Boole γνωστή σήμερα σαν Άλγεβρα Διακοπτών που καλύπτει την ανάλυση και τη σύνθεση συνδυαστικών (combinational) κυκλωμάτων, δηλαδή κυκλωμάτων των οποίων οι έξοδοι εξαρτώνται μόνο από τις παρούσες τιμές των εξόδων. Η Άλγεβρα Διακοπτών εξελίχθηκε στην Θεωρία των Διακοπτών (Switching Theory) η οποία καλύπτει επί πλέον την ανάλυση και τη σύνθεση ακολουθιακών (sequential) κυκλωμάτων, δηλαδή κυκλωμάτων των οποίων οι έξοδοι εξαρτώνται από τις παρούσες, αλλά και από τις παρελθούσες τιμές των εισόδων.

3.2 Άλγεβρα Boole

Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να οριστεί αξιωματικά η Άλγεβρα Boole. Ο πιο απλός τρόπος είναι ο αξιωματικός ορισμός που εισήχθη από τον Huntington το 1904, σύμφωνα με τον οποίο η *Άλγεβρα Boole* είναι μια αλγεβρική δομή, η οποία αποτελείται από ένα σύνολο στοιχείων B εφοδιασμένο με πράξεις, η αναπαράσταση των οποίων γίνεται με τη χρήση των τελεστών $+$, $\cdot$, $\overline{\ }$ και πληροί τα αξιώματα που δίδονται στη συνέχεια, όπου $a \in B$ σημαίνει ότι το a είναι στοιχείο του συνόλου B

Αξίωμα 3.1. *Κλειστότητα* του Β ως προς τις πράξεις +, · :

Για κάθε $x, y \in$Β (ισχύουν οι σχέσεις

$x+y \in$ Β,

$x \cdot y \in$ Β

Αξίωμα 3.2. *Ύπαρξη ουδετέρων στοιχείων* για τις πράξεις +, · στο σύνολο Β.

Για κάθε $x \in$ Β υπάρχουν στοιχεία 0, 1 $\in$Β, έτσι ώστε

$x+0 = x \in$ Β,

$x \cdot 1 = x \in$ Β

Αξίωμα 3.3. *Αντιμεταθετική ιδιότητα*

Για κάθε $x, y \in$ Β ισχύουν οι σχέσεις

$x+y=y+x$,

$x \cdot y=y \cdot x$

Αξίωμα 3.4. Προσεταιρισμού

Για κάθε $x, y, z \in$ Β ισχύουν οι σχέσεις

$x+(y+z)=(x+y)+z$

$x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z$

Αξίωμα 3.5. Επιμεριστική ιδιότητα

Για κάθε $x, y, z \in$Β ισχύουν οι σχέσεις

$x \cdot (y+z)=x \cdot y+x \cdot z$

$x+y \cdot z=(x+y) \cdot (x+z)$

Αξίωμα 3.6. Ύπαρξη συμπληρώματος

Για κάθε στοιχείο $x \in$Β, υπάρχει $\overline{x} \in B$, που λέγεται *συμπλήρωμα* (*complement*) του x, τέτοιο ώστε

$x + \overline{x} = 1$

$x \cdot \overline{x} = 0$

Αξίωμα 3.7.

Υπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία $x, y \in$Β, τέτοια ώστε:

$x \neq y$.

3.2.1 Δυισμός

Τα αξιώματα του Huntington έχουν παρουσιαστεί σαν ζεύγη τα οποία προκύπτουν το ένα από το άλλο με ανταλλαγή του + με το · και του 0 με το 1. Επομένως ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1. Δυϊσμού

Έστω ότι ισχύει μια πρόταση της Άλγεβρας Boole, τότε ισχύει και η δυϊκή της πρόταση, δηλαδή αυτή που προκύπτει με την εναλλαγή του + με το · και του 0 με το 1.

3.2.2 Βασικά Θεωρήματα της Άλγεβρας Boole

Θεώρημα 3.2. Μοναδικότητας

α) Τα στοιχεία 0 και 1 είναι μοναδικά.
β) Το συμπλήρωμα $\overline{x}$ του x είναι μοναδικό.

Θεώρημα 3.3.

Για κάθε $x \in$B ισχύουν οι σχέσεις

$$x+x=x, \quad x \cdot x=x$$

Θεώρημα 3.4.

Για κάθε $x \in$ B ισχύουν οι σχέσεις

$$x+1=1, \quad x \cdot 0=0$$

Θεώρημα 3.5.

Για τα 0 και 1 ισχύουν οι σχέσεις

$$\overline{0}=1, \quad \overline{1}=0$$

Θεώρημα 3.6. Απορρόφησης

Για κάθε $x, y \in$B ισχύουν οι σχέσεις

$$x+x \cdot y=x \quad x \cdot (x+y)=x$$

Θεώρημα 3.7.

Για κάθε $x \in$ B ισχύει η σχέση

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Θεώρημα 3.8.

Για κάθε $x, y \in$ B ισχύουν οι σχέσεις

$$x+\overline{x} \cdot y = x + y$$

$$x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$$

Θεώρημα 3.9. *De Morgan*

Για κάθε $x, y \in$ B ισχύουν οι σχέσεις

$$\overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

3.2.3 Θεωρήματα της Άλγεβρας Boole για Πολλές Μεταβλητές

Θεώρημα 3.10.

Για κάθε $x \in B$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n} = x$$

$$\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n} = x$$

Θεώρημα 3.11. Θεώρημα De Morgan για πολλές μεταβλητές

Για κάθε $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0 \in B$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\overline{x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot \ldots \cdot x_0} = \overline{x}_{n-1} + \overline{x}_{n-2} + \ldots + \overline{x}_0$$

$$\overline{x_{n-1} + x_{n-2} + \ldots + x_0} = \overline{x}_{n-1} \cdot \overline{x}_{n-2} \cdot \ldots \cdot \overline{x}_0$$

3.2.4 Αποδείξεις των Θεωρημάτων της Άλγεβρας Boole

Απόδειξη του θεωρήματος 3.1

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι προφανής διότι τα αξιώματα έχουν δοθεί σαν ζεύγη των οποίων το ένα μέλος προκύπτει από το άλλο με ανταλλαγή του + με το · και του 0 με το 1.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.2

(α) Μοναδικότητα των 0 και 1

Έστω ότι υπάρχουν δύο μηδενικά στοιχεία στο σύνολο *B* τα 0_1, 0_2. Τότε σύμφωνα με το αξίωμα 3.2 ισχύουν οι επόμενες σχέσεις

$0_1+0_2=0_1$

$0_2+0_1=0_2$

Σύμφωνα με το αξίωμα 3.3 ισχύει η σχέση $0_1+0_2=0_2+0_1$, άρα $0_1=0_2$.
Δηλαδή υπάρχει ένα μόνο ουδέτερο μηδενικό στοιχείο.
Η απόδειξη της μοναδικότητας του 1 γίνεται δυικά.

(β) Μοναδικότητας του $\overline{x}$

Έστω ότι υπάρχουν δύο συμπληρώματα του *x* στο B τα $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$. Τότε σύμφωνα με το αξίωμα 3.2 ισχύουν οι σχέσεις

$x + \overline{x}_1 = 1,\ \ x + \overline{x}_2 = 1,\ \ x \cdot \overline{x}_1 = 0,\ \ x \cdot \overline{x}_2 = 0$

Ισχύει $\overline{x}_2 = 1 \cdot \overline{x}_2$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.2)

$= (x + \overline{x}_1) \cdot \overline{x}_2$ (Υπόθεση)

$= x \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.4)

$= 0 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$ (Υπόθεση)

$$
\begin{aligned}
&= x \cdot \overline{x}_1 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 && \text{(Υπόθεση)} \\
&= x \cdot \overline{x}_1 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 && \text{(Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.3)} \\
&= (x + \overline{x}_2) \cdot \overline{x}_1 && \text{(Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.6)} \\
&= 1 \cdot \overline{x}_1 && \text{(Υπόθεση)} \\
&= \overline{x}_1 && \text{(Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.2)}
\end{aligned}
$$

Επομένως υπάρχει ένα μόνο συμπλήρωμα του x.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.3

Ισχύει

$$
\begin{aligned}
x + x &= (x + x) \cdot 1 && \text{(Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.2)} \\
&= (x + x) \cdot (x + \overline{x}) && \text{(Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.5)} \\
&= x + x \cdot \overline{x} && \text{(Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.4)} \\
&= x + 0 && \text{(Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.6)} \\
&= x && \text{(Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.2)}
\end{aligned}
$$

Η απόδειξη της σχέσης $x \cdot x = x$ γίνεται δυικά.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.4

Ισχύει

$$
\begin{aligned}
x + 1 &= x + x + \overline{x} && \text{(Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.6)} \\
&= x + \overline{x} && \text{(Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3)} \\
&= 1 && \text{(Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.6)}
\end{aligned}
$$

Η απόδειξη της σχέσης $x \cdot 0 = 0$ γίνεται δυικά.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.5

$$
\begin{aligned}
\overline{0} &= \overline{0} + 0 && \text{(Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.2)} \\
&= 1 && \text{(Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.6)}
\end{aligned}
$$

Η απόδειξη της σχέσης $\overline{1} = 0$ γίνεται δυικά.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.6

$$
\begin{aligned}
x + x \cdot y &= x \cdot 1 + x \cdot y && \text{(Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.2)} \\
&= x \cdot (1 + y) && \text{(Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.4)} \\
&= x \cdot 1 && \text{(Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4)} \\
&= x && \text{(Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.2)}
\end{aligned}
$$

Η απόδειξη της σχέσης $x \cdot (x + y) = x$ γίνεται δυικά

Απόδειξη του θεωρήματος 3.7

Έστω $\overline{\overline{x}} = y$. Τότε

$\overline{x} + y = 1$ και $\overline{x} \cdot y = 0$ (Αξίωμα 3.5)

Αλλά

$x + \overline{x} = 1$ και $x \cdot \overline{x} = 0$ (Αξίωμα 3.5)

Τα *x* και *y* ικανοποιούν το αξίωμα 3.5 σαν συμπλήρωμα του $\overline{x}$ και με βάση το θεώρημα 3.2 (β) *x*=*y*.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.8

Ισχύει $x + \overline{x} \cdot y = (x + \overline{x}) \cdot (x + y)$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.4)

$= 1 \cdot (x + y)$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.6)

$= x + y$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.2)

Η απόδειξη της σχέσης $x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$ γίνεται δυικά.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.9

Για να αποδείξουμε ότι $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ θα δείξουμε ότι $(x + y) + \overline{x} \cdot \overline{y} = 1$ και $(x + y) \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} = 0$.

Πράγματι

$(x + y) + \overline{x} \cdot \overline{y} = [(x + y) + \overline{x}] \cdot [(x + y) + \overline{y}]$ (Αξίωμα 3.5)

$= [(y + x) + \overline{x}] \cdot [(x + y) + \overline{y}]$ (Αξίωμα 3.3)

$= [y + (x + \overline{x})] \cdot [x + (y + \overline{y})]$ (Αξίωμα 3.4)

$= (y + 1) \cdot (x + 1)$ (Αξίωμα 3.6)

$= 1 \cdot 1$ (Θεώρημα 3.4)

$= 1$ (Θεώρημα 3.3)

$(x + y) \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} = x \cdot (\overline{x} \cdot \overline{y}) + y \cdot (\overline{x} \cdot \overline{y})$ (Αξίωμα 3.5)

$= x \cdot (\overline{x} \cdot \overline{y}) + y \cdot (\overline{y} \cdot \overline{x})$ (Αξίωμα 3.3)

$= (x \cdot \overline{x}) \cdot \overline{y} + (y \cdot \overline{y}) \cdot \overline{x}$ (Αξίωμα 3.5)

$= 0 \cdot \overline{y} + 0 \cdot \overline{x}$ (Αξίωμα 3.6)

$= 0+0$ (Θεώρημα 3.4)

$= 0$ (Θεώρημα 3.3)

(β) Απόδειξη της σχέσης $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$

Σύμφωνα με το προηγούμενο ισχύει $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

Για $a = \overline{x}$ και $b = \overline{y}$ ισχύει

$$\overline{\overline{x} + \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{y}} = x \cdot y \quad \text{(Θεώρημα 3.7)}$$

Επομένως $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$

3.2.5 Άλγεβρα Διακοπτών

Η *Άλγεβρα Διακοπτών* είναι ένα σύνολο Β = {0, 1} το οποίο είναι εφοδιασμένο με τις λογικές πράξεις +, ·, και $\overline{\ }$, οι οποίες για κάθε x, $y \in \{0, 1\}$ ορίζονται όπως στη συνέχεια

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

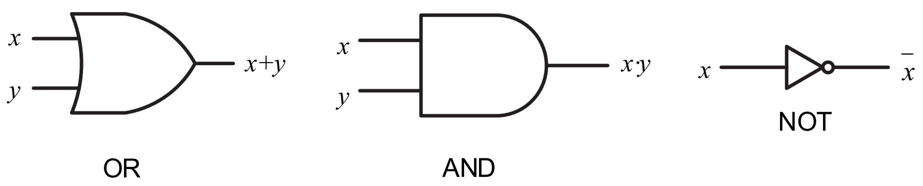
x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Για την Άλγεβρα των Διακοπτών ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.12. Η Άλγεβρα Διακοπτών είναι μία δίτιμη Άλγεβρα Boole.

Στην Άλγεβρα Διακοπτών οι λογικές πράξεις +, · , $\overline{\ }$ ονομάζονται αντίστοιχα OR, AND, NOT (συμπλήρωμα). Αρχικά τα κυκλώματα με τα οποία πραγματοποιούνταν οι παραπάνω λογικές πράξεις ήταν οι ηλεκτρονόμοι (ρελέ). Στη συνέχεια δημιουργήθηκαν ειδικά ηλεκτρονικά κυκλώματα, οι λογικές πύλες, από τις οποίες ονομάστηκε OR αυτή που πραγματοποιεί την λογική πράξη "+", AND αυτή που πραγματοποιεί την λογική πράξη "·", και NOT αυτή που πραγματοποιεί το συμπλήρωμα των 0, 1. Στο σχήμα 3.1 δίδονται τα λογικά σύμβολα των πυλών OR, AND δύο εισόδων και της πύλης NOT. Η πύλη NOT λέγεται και Inverter (Αντιστροφέας).



Σχήμα 3.1 *Βασικές λογικές πύλες*

3.3 Λογικές Συναρτήσεις

Έστω ότι $\left\langle B,+,\cdot,\bar{\ } \right\rangle$ είναι μια Άλγεβρα Boole. Τότε κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση $f: B^n \to B$, ορίζει μια *συνάρτηση Boole*, $f(x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_0)$, με $x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_0 \in B$. Το πεδίο ορισμού της *f* είναι το Καρτεσιανό γινόμενο $B^n = \underbrace{B\times B\times\ldots\times B}_{n}$.

Ειδικότερα, για την Άλγεβρα των Διακοπτών, όπου $B = \{0, 1\}$ κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$, ορίζει μια *λογική συνάρτηση* (*logic function*) $f(x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_0)$. Τα $x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_0 \in \{0,1\}$ ονομάζονται *λογικές μεταβλητές* (*logic variables*). Το Καρτεσιανό Γινόμενο $\{0,1\}^n = \underbrace{\{0,1\}\times\{0,1\}\times\ldots\times\{0,1\}}_{n}$, περιλαμβάνει 2^n στοιχεία και είναι το *πεδίο ορισμού* της *f*. Το *πεδίο τιμών* της *f* είναι το σύνολο {0, 1}, δηλαδή η συνάρτηση *f* για κάθε ένα από τα 2^n στοιχεία του πεδίου ορισμού τη μπορεί να πάρει την τιμή 0 και 1.

3.3.1 Παραστάσεις Λογικών Συναρτήσεων

Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να περιγράψουμε μια λογική συνάρτηση. Από αυτούς δίδονται στη συνέχεια οι δύο βασικοί, που είναι με πίνακες αληθείας και με λογικές παραστάσεις.

Παράσταση με Πίνακες Αληθείας

Οι λογικές συναρτήσεις μπορούν να παρασταθούν με πίνακες αληθείας. *Πίνακας αληθείας* (*truth table*) μιας λογικής συνάρτησης είναι ένας πίνακας, ο οποίος περιλαμβάνει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των τιμών των μεταβλητών της συνάρτησης και για κάθε συνδυασμό δίνεται η αντίστοιχη τιμή της. Για συναρτήσεις *n* μεταβλητών ο πίνακας αληθείας έχει 2^n γραμμές. Στην συνέχεια δίδονται οι συνδυασμοί των τιμών των εισόδων για πίνακες αληθείας λογικών συναρτήσεων 2 και 3 μεταβλητών.

x	y	f
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

x	y	z	f
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Παράδειγμα 3.1. Πίνακας αληθείας της λογικής συνάρτησης $f(x,y)$ για την οποία ισχύει f=1 εάν περιττός αριθμός των μεταβλητών της έχει την τιμή 1, και $f=0$, εάν άρτιος αριθμός μεταβλητών έχει την τιμή 1. Το 0 θεωρείται άρτιος αριθμός.

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Παράδειγμα 3.2. Πίνακας αληθείας της λογικής συνάρτησης $f(x_2, x_1, x_0)$ για την οποία ισχύει f=1 εάν άρτιος αριθμός των μεταβλητών x_i έχει την τιμή 1, και $f=0$, εάν περιττός αριθμός μεταβλητών x_i έχει την τιμή 1. Το 0 θεωρείται άρτιος αριθμός.

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Μη πλήρως καθορισμένες λογικές συναρτήσεις

Μη *πλήρως καθορισμένη λογική συνάρτηση* είναι αυτή της οποίας η τιμή δεν είναι καθορισμένη για κάποιους συνδυασμούς τιμών των εισόδων . Η τιμή της συνάρτησης για αυτές τις τιμές ονομάζεται "don’t care" και συμβολίζεται με X (ή d, ή –).

Παράδειγμα 3.3. Πίνακας αληθείας μιας μη πλήρως καθορισμένης λογικής συνάρτησης $f(x_2, x_1, x_0)$.

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	X
0	1	1	1
1	0	0	X
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0