Κεφάλαιο 1

Συστήματα Συντεταγμένων

Ένα από τα βασικά προβλήματα της φυσικής αλλά και γενικά της ανθρώπινης πρακτικής είναι *ο προσδιορισμός της θέσης* ενός σώματος.

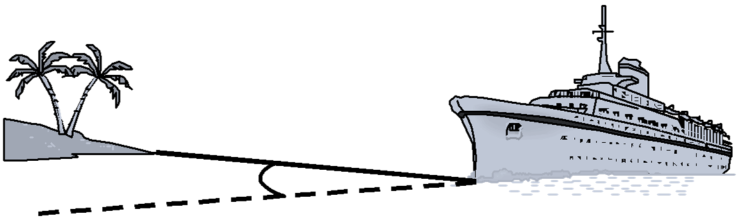
Ας δούμε πως αυτό γίνεται στην πράξη, με βάση κάποια απλά παραδείγματα από τη ζωή.

Ας φανταστούμε κάποιο αυτοκίνητο που κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο. Αν ο οδηγός του θέλει να προσδιορίσει με ακρίβεια τη θέση κάποιου αντικειμένου (π.χ ενός δέντρου) που βρίσκεται στο δρόμο ή δίπλα σε αυτόν, αρκεί να πει πόσα μέτρα εμπρός (ή πίσω) βρίσκεται αυτό (Σχήμα 1.1). Είναι βέβαια προφανές πως αν η φορά κίνησης του οδηγού μας είναι διαφορετική, οι έννοιες εμπρός - πίσω αλλάζουν θέση. Έχει επίσης σημασία και το ότι αν το αντικείμενο είναι ένας ποδηλάτης που κινείται στον ίδιο δρόμο δεν μας αρκεί μόνο η θέση του, που διαρκώς αλλάζει. Πρέπει να περιγράψουμε και προς τα πού κινείται, προς το αυτοκίνητο, ή στην αντίθετη κατεύθυνση.

Σχήμα 1.1

Έστω ότι σε κάποια σελίδα κειμένου θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θέση μιας λέξης. Επιλέγουμε μία γωνία (π.χ. πάνω αριστερά ή δεξιά) και αρκεί να πούμε πόσες σειρές (ή εκατοστά) από επάνω και πόσες λέξεις (ή εκατοστά) από αριστερά (ή δεξιά αντίστοιχα) βρίσκεται η λέξη.

Ας φαντασθούμε τώρα, ότι κάποιο πλοίο που κινείται στη θάλασσα, θέλει να προσδιορίσει τη θέση μιας νησίδας (Σχήμα 1.2) ή κάποιου άλλου πλοίου, μπορεί να το κάνει ορίζοντας την απόσταση και τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία που το συνδέει με τη νησίδα ή το άλλο πλοίο με την ευθεία της δικής του πορείας, προσδιορίζοντας αν η γωνία αυτή είναι δεξιά ή αριστερά από την πορεία κίνησης του πλοίου.



Σχήμα 1.2

Αν τώρα αναφερόμαστε στη θέση π.χ. μιας καρέκλας που βρίσκεται στο δάπεδο ενός δωματίου σε σχέση με μια από τις γωνίες του δωματίου, πρέπει να την προσδιορίσουμε με δυο αριθμούς που μας δίνουν την απόσταση της καρέκλας από τους δύο τοίχους που σχηματίζουν τη γωνία.

Έστω τέλος ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θέση κάποιας πόλης στην επιφάνεια της Γης (για την οποία η ακτίνα είναι γνωστή), αρκεί να δώσουμε το γεωγραφικό πλάτος και το γεωγραφικό μήκος.

Είναι λοιπόν κατανοητό πως για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σώματος το πρώτο πράγμα που θα πρέπει να μας προβληματίσει είναι σε σχέση με τι. Στα παραδείγματά μας την προσδιορίσαμε σε σχέση με το αυτοκίνητό μας, κάποια γωνία της σελίδας του βιβλίου, το πλοίο μας, μια γωνία του δωματίου, το κέντρο της Γης.

Προσδιορίζουμε δηλαδή τη θέση σε σχέση με κάποιο σημείο ή καλύτερα σώμα (στο οποίο κατά κανόνα ανήκει το σημείο). Το σώμα αυτό το ονομάζουμε *σώμα αναφοράς*.

Εκτός από το σώμα αναφοράς, ως προς το οποίο προσδιορίζεται η θέση του σώματος, μας χρειάζονται και κάποιοι αριθμοί. Το πλήθος αυτών των αριθμών είναι διαφορετικό για τις διάφορες περιπτώσεις. Αν έχουμε να κάνουμε με την κίνηση του αυτοκινήτου σε έναν ευθύγραμμο δρόμο (μία διάσταση) μας χρειάζεται ένας αριθμός (η απόσταση του αυτοκινήτου) αλλά και ο προσδιορισμός εμπρός ή πίσω. Αν αναφερόμαστε στη σελίδα ή στη θάλασσα, δηλαδή στο επίπεδο (δύο διαστάσεις) μας χρειάζονται δύο αριθμοί (π.χ. για τη σελίδα η σειρά από επάνω και ο αριθμός της λέξης από δεξιά, για το πλοίο η απόσταση και γωνία, δεξιά ή αριστερά από την πορεία), ενώ αν έχουμε να κάνουμε με το δωμάτιο ή τη Γη, δηλαδή ολόκληρο το χώρο (τρεις διαστάσεις) μας χρειάζονται τρεις αριθμοί (σημείο ανάρτησης στο επίπεδο της οροφής με δυο αριθμούς και μήκος καλωδίου προς τα κάτω για τη λάμπα, ακτίνα της Γης, γεωγραφικό μήκος και πλάτος για την πόλη).

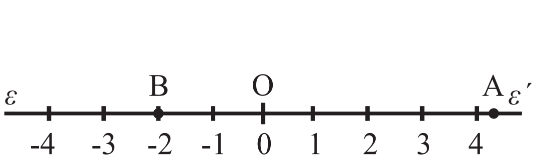
Γίνεται σαφές, πως εκτός από τα μεγέθη για κάποια από αυτά χρειάζεται και ο προσδιορισμός «εμπρός – πίσω», «δεξιά – αριστερά», «βόρεια – νότια» κ.τ.λ. Η χρήση παρόμοιων όρων είναι δυνατόν να μας δυσκολέψει πολύ στη Φυσική και, βέβαια, είναι τελείως άχρηστη όταν έχουμε να κάνουμε με μαθηματικούς τύπους και πράξεις. Από τη δύσκολη θέση μας βγάζουν οι θετικοί και αρνητικοί αριθμοί.

Στη Φυσική λοιπόν το θεμελιώδες ζήτημα του προσδιορισμού της θέσης κάποιου σώματος ξεκινά από τον ορισμό του σώματος αναφοράς, δηλαδή κάποιου φυσικού αντικειμένου (σώματος) ως προς το οποίο προσδιορίζουμε τις θέσεις των φυσικών αντικειμένων που μελετάμε. Στη συνέχεια συνδέουμε με το σώμα αναφοράς ένα *σύστημα συντεταγμένων*, θεωρώντας ένα σημείο του σώματος ως αρχή του συστήματος. Σώμα αναφοράς και σύστημα συντεταγμένων μαζί συνήθως ονομάζονται *σύστημα αναφοράς*.

Είναι κατανοητό πως, όπως αναφέραμε πιο πάνω, αν έχουμε ορίσει το σύστημα αναφοράς, για να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σώματος, μας χρειάζονται, ανάλογα με την περίπτωση, από ένας έως τρεις αριθμοί, οι οποίοι ονομάζονται *συντεταγμένες*.

Κανείς βέβαια δεν μας περιορίζει για το είδος των αριθμών που μας προσδιορίζουν τη θέση του σώματος, δηλαδή για το είδος του συστήματος των συντεταγμένων. Θεωρητικά, υπάρχουν πάρα πολλά συστήματα και το γνωστό μας Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι ένα από αυτά. Παρακάτω θα εξετάσουμε κάποια συστήματα τα οποία χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στη Φυσική. Θα δείξουμε μάλιστα και τη σχέση τους με το Καρτεσιανό, που είναι ευρύτατα διαδεδομένο.

1.1. Ευθεία



Σχήμα 1.3

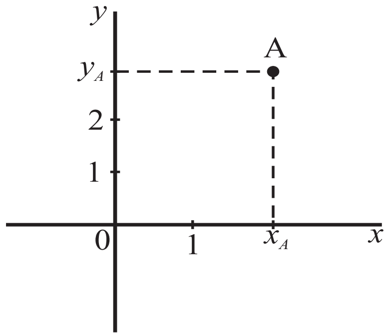
Έστω ότι το σώμα μας βρίσκεται στην ευθεία εε΄ (βλ. σχ. 1.3), την οποία θεωρούμε ως άξονα συντεταγμένων *x*. Ένα σημείο του σώματος αναφοράς, το Ο το ορίζουμε ως αρχή, Ο άξονας *x* είναι βαθμονομημένος (δηλαδή έχει ορισθεί μια συγκεκριμένη μονάδα μέτρησης) και προσανατολισμένος (έχει ορισθεί η θετική και η αρνητική φορά του), όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3. Στην περίπτωσή μας, τα σημεία που βρίσκονται δεξιά του Ο έχουν πρόσημο « + », ενώ όσα βρίσκονται αριστερά « – ». Το σημείο Ο συμπίπτει βέβαια με το 0. Προφανώς $-\infty < x < \infty$. Έτσι καλύπτεται όλη η ευθεία.

Τονίζουμε εδώ ότι αυτός ο προσανατολισμός δεν είναι υποχρεωτικός. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε θετικά όσα σημεία βρίσκονται αριστερά του Ο και αρνητικά όσα βρίσκονται δεξιά, ανάλογα με το πρόβλημα που εξετάζουμε.

Στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς η θέση του σημείου Α ορίζεται μονοσήμαντα αν πούμε ότι είναι η 4,2 (βλ. σχήμα1.3). Το ίδιο ισχύει και για το Β, για το οποίο μπορούμε να πούμε ότι βρίσκεται στη θέση -2.

1.2. Επίπεδο

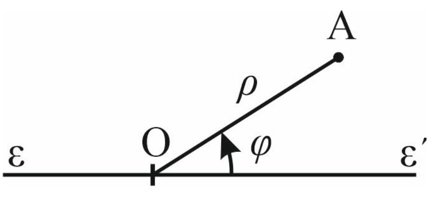
Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούνται συνήθως δυο συστήματα συντεταγμένων. Σ' αυτά, όπως και προηγουμένως, ως αρχή θεωρείται ένα σημείο του σώματος αναφοράς, το Ο.



Σχήμα 1.4

<u>*Καρτεσιανό σύστημα:*</u> Αυτό αποτελείται από τους άξονες x και y που είναι κάθετοι μεταξύ τους, βαθμονομημένοι και προσανατολισμένοι (βλ. σχ. 1.4). Έτσι η θέση π.χ. του σημείου Α προσδιορίζεται μονοσήμαντα από το ζεύγος των αριθμών x_A, y_A. Στο παράδειγμα του σχήματός μας θα είναι $x_A = 2$, $y_A = 3$. Οι αριθμοί αυτοί είναι οι συντεταγμένες. Είναι και πάλι κατανοητό ότι $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

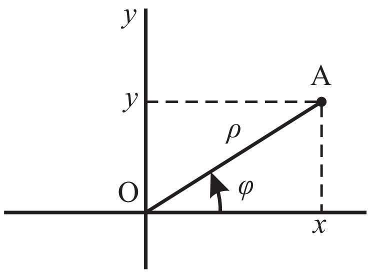
<u>*Πολικό σύστημα:*</u> Το σύστημα αυτό αποτελείται από την προσανατολισμένη ευθεία εε΄ (βλ. σχ. 1.5) η οποία διέρχεται από το σημείο Ο.



Σχήμα 1.5

Στην περίπτωση αυτή η θέση του σημείου Α προσδιορίζεται από το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ που ονομάζουμε ρ και τη γωνία φ που σχηματίζει η ευθεία ΟΑ με την εε΄ και η οποία μετριέται από την θετική ημιευθεία Οε΄ με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού. Από τον ορισμό του ρ γίνεται κατανοητό ότι $0 \leq \rho < \infty$, ενώ για να έχουμε μονοσήμαντη αντιστοίχιση κάθε σημείου με 2 πολικές συντεταγμένες θα πρέπει $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Σχέση μεταξύ πολικών και καρτεσιανών συντεταγμένων: Εάν ταυτίσουμε το θετικό ημιάξονα x με τον Οε΄ και θεωρήσουμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ορθοκανονικό, δηλαδή σύστημα με τις ίδιες ακριβώς μονάδες σε κάθε άξονα, από το σχ. 1.6 έχουμε:



Σχήμα 1.6

$$x = \rho\cos\varphi, \;\; y = \rho\sin\varphi \qquad \textbf{(1.1)}$$

και αντίστροφα

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \;\; \varphi = \text{arc tan}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \textbf{(1.2)}$$

<u>Παράδειγμα Μ1.1.</u> Αποδείξτε ότι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων $\mathrm{A}\left(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}\right)$ και $\mathrm{B}\left(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B}\right)$ του επιπέδου στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ισούται με

$$s = \sqrt{\left(x_\mathrm{A} - x_\mathrm{B}\right)^2 + \left(y_\mathrm{A} - y_\mathrm{B}\right)^2}$$

<u>Λύση</u>: Παριστάνουμε τα σημεία Α και Β στο σχήμα 1.7. Είναι κατανοητό, πως πρέπει να υπολογίσουμε το μέτρο του (ΑΒ). Από το σχήμα εύκολα βλέπουμε, πως

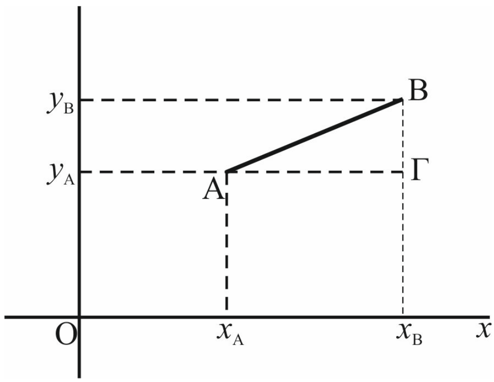
$$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{A\Gamma})^2 + (\mathrm{\Gamma B})^2 .$$

Από το ίδιο σχήμα επίσης εύκολα καταλαβαίνουμε πως

$$(\mathrm{A\Gamma}) = x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}$$

και

$$(\mathrm{\Gamma B}) = y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A} ,$$



Σχήμα 1.7

οπότε

$$(\mathrm{AB}) = s = \sqrt{(\mathrm{A\Gamma})^2 + (\mathrm{\Gamma B})^2} = \sqrt{\left(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}\right)^2 + \left(y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(x_\mathrm{A} - x_\mathrm{B}\right)^2 + \left(y_\mathrm{A} - y_\mathrm{B}\right)^2}$$

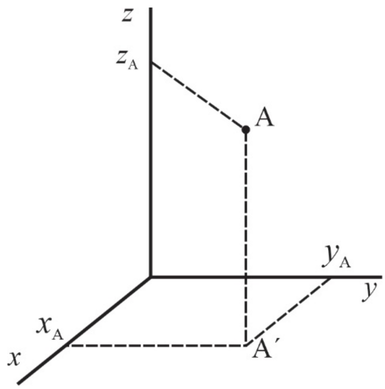
1.3. Χώρος

Στην περίπτωση αυτή συνήθως χρησιμοποιούνται 3 συστήματα συντεταγμένων.

Καρτεσιανό σύστημα: Αυτό αποτελείται από τους άξονες x, y, όπως και στο επίπεδο. και από τον επίσης βαθμονομημένο και προσανατολισμένο άξονα z που είναι κάθετος στο επίπεδο xy και περνάει από το Ο (βλ. σχ. 1.8). Η θέση του σημείου προσδιορίζεται ως εξής:

Βρίσκουμε το Α΄ που είναι η προβολή του Α στο επίπεδο xy.

Το Α΄ στο επίπεδο xy έχει συντεταγμένες x_A και y_A. Βρίσκουμε επίσης την προβολή z_A του Α στον άξονα z. Τα x_A, y_A, z_A αποτελούν τις συντεταγμένες που προσδιορίζουν μονοσήμαντα το σημείο Α.



Σχήμα 1.8

Προφανώς, για τις συντεταγμένες του συστήματος ισχύει:

$$-\infty < x < \infty, \ -\infty < y < \infty, \ -\infty < z < \infty.$$

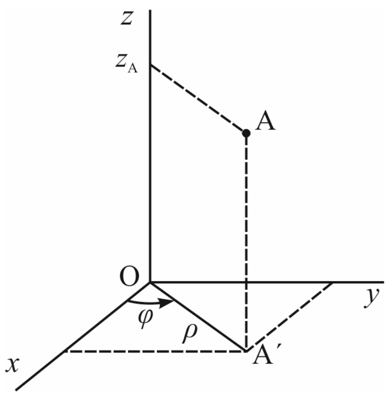
Κυλινδρικό σύστημα: Το σύστημα αυτό αποτελεί συνδυασμό του πολικού και του καρτεσιανού συστήματος. Έτσι το σημείο Α (βλ. σχ. 1.9) προσδιορίζεται ως εξής:

Βρίσκουμε την προβολή του Α στο επίπεδο xy και τις πολικές της συντεταγμένες ρ και φ. Βρίσκουμε επίσης την προβολή z_A του Α στον άξονα z. Τα ρ, φ και z_A προσδιορίζουν μονοσήμαντα τη θέση του Α.

Εδώ έχουμε:

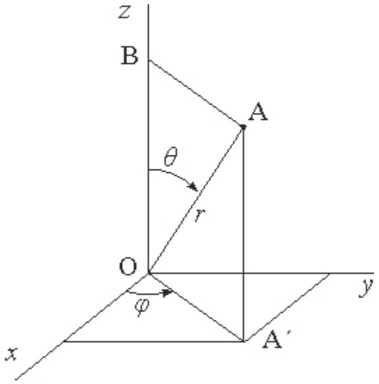
$$0 \le \rho < \infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$-\infty < z < \infty.$$



Σχήμα 1.9

Σφαιρικό σύστημα: Για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου στο σύστημα αυτό χρησιμοποιούμε ένα μήκος και δύο γωνίες, Έτσι το σημείο Α προσδιορίζεται ως εξής



Σχήμα 1.10

α. Ορίζουμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος (ΟΑ) = r (βλ. σχ. 1.10):

β. Βρίσκουμε την προβολή του Α στο επίπεδο Οxy και χρησιμοποιούμε την πολική γωνία φ

γ. Χρησιμοποιούμε επίσης τη γωνία θ που σχηματίζει το ΟΑ με τον θετικό ημιάξονα των z, μετρώντας την με φορά από τον ημιάξονα αυτόν προς το r, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Τα r, φ και θ προσδιορίζουν το σημείο Α.

Για να είναι μονοσήμαντος αυτός ο προσδιορισμός, πρέπει, μεταβάλλοντας τις συντεταγμένες μας στα όριά τους, να διατρέχουμε μία και μόνο μία φορά όλο τον τρισδιάστατο χώρο.

Με βάση το παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι ισχύει:

$$0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta < \pi.$$

Σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων των διάφορων συστημάτων του χώρου:

Καρτεσιανό – Κυλινδρικό.

Από το σχ. 1.9 εύκολα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned} \quad \textbf{(1.3)}$$

Καρτεσιανό – Σφαιρικό.

Από το σχήμα 1.10 έχουμε: $O\hat{A}A' = \theta$, επομένως: (ΟΑ΄) = $r\sin\theta$. Έχουμε επίσης z = (ΟΒ). Άρα:

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z &= \rho\cos\theta. \end{aligned} \quad \textbf{(1.4)}$$

Κυλινδρικό – Σφαιρικό.

Από τα σχήματα 1.9 και 1.10 εύκολα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \rho &= r\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \\ \varphi &= \varphi \end{aligned} \tag{1.5}$$

Εύκολα βρίσκουμε και τους αντίστροφους μετασχηματισμούς.

Κυλινδρικό – Καρτεσιανό.

Από τις (1.3) έχουμε:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z\,. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Σφαιρικό – Καρτεσιανό.

Από τις (1.4) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta &= \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Σφαιρικό – Κυλινδρικό.

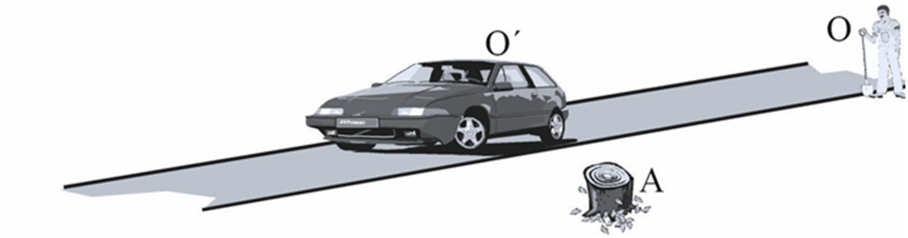
Από τις (1.5) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2+z^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right) \\ \varphi &= \varphi \end{aligned} \tag{1.8}$$

1.4. Μετασχηματισμοί ενός Καρτεσιανού Συστήματος Αναφοράς

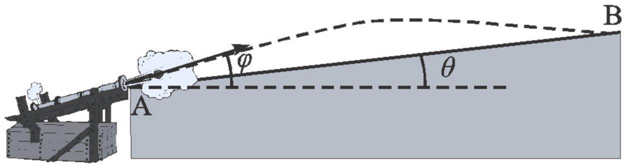
Συχνά στη φυσική απαιτείται να περάσουμε από ένα σύστημα συντεταγμένων σε άλλο. Μπορούμε να αναφέρουμε χαρακτηριστικά δυο απλά παραδείγματα.

α. Παρατηρητής Ο βλέπει αντικείμενο Α (π.χ έναν κορμό δέντρου) στο σημείο (x,y). Σε ποιο σημείο θα βλέπει το αντικείμενο Α τη χρονική στιγμή t παρατηρητής Ο΄ που βρίσκεται σε αυτοκίνητο το οποίο κινείται με **σταθερή ταχύτητα υ κατά μήκος ευθύγραμμου δρόμου που συμπίπτει με** τον άξονα x (βλ. σχ. 1.11), αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ τα Ο και Ο΄ συνέπιπταν;



Σχήμα 1.11

β. Βλήμα εκτοξεύεται από το σημείο Α (κάτω σημείο κεκλιμένου επιπέδου που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο) υπό γωνία φ ως προς το οριζόντιο επίπεδο (βλ. σχ. 1.12). Υπολογίστε την απόσταση (ΑΒ).



Σχήμα 1.12

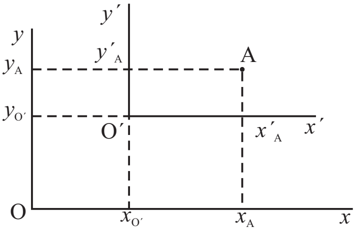
Είναι κατανοητό πως η απάντηση και στα δυο ερωτήματα διευκολύνεται πολύ αν μπορούσαμε από ένα σύστημα συντεταγμένων να περάσουμε σε άλλο.

Κάτι τέτοιο βέβαια μπορεί να γίνει και μαθηματικά περιγράφεται σχετικά απλά.

Παρακάτω θα δώσουμε τους βασικούς τύπους αλλαγής συστήματος συντεταγμένων για την περίπτωση του καρτεσιανού συστήματος στο επίπεδο, χωρίζοντας το πρόβλημα σε δύο. Στη μετατόπιση και την περιστροφή του συστήματος.

Ο αναγνώστης, αν είναι απαραίτητο, μπορεί εύκολα, με βάση τα όσα αναλύονται παρακάτω, να βρει τους αντίστοιχους τύπους, τόσο για το συνδυασμό των δύο περιπτώσεων, για το χώρο, καθώς και για τα άλλα συστήματα συντεταγμένων.

Μετατόπιση της αρχής του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Έστω σημείο Α, οι συντεταγμένες του οποίου στο σύστημα Ο είναι x_A, y_A. Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων Ο΄, οι άξονες του οποίου x' και y' είναι παράλληλοι προς τους x και y, ενώ η αρχή του βρίσκεται στο σημείο x_0, y_0 (βλ. σχ. 1.13).



Σχήμα 1.13

Είναι προφανές από το σχήμα, ότι στο σύστημα αυτό οι συντεταγμένες του σημείου Α θα είναι

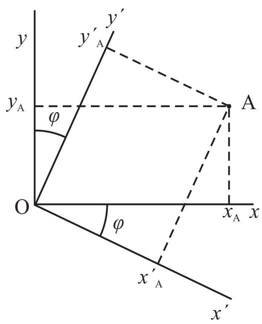
$$x'_A = x_A - x_0$$
$$y'_A = y_A - y_0 \qquad \textbf{(1.9)}$$

Από εδώ προκύπτουν εύκολα και οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί

$$x_A = x'_A + x_0$$
$$y_A = y'_A + y_0 \qquad \textbf{(1.10)}$$

Όπως θα δούμε στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο, αυτοί οι μετασχηματισμοί μπορούν να αποδειχθούν πολύ πιο απλά με τη χρήση των διανυσμάτων.

Περιστροφή του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Θα εξετάσουμε μόνο την απλούστερη περίπτωση του επιπέδου. Έστω σημείο Α με συντεταγμένες x_A, y_A στο σύστημα Οxy. Θα υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του στο σύστημα Ο$x'y'$, το οποίο έχει περιστραφεί κατά γωνία φ ως προς το πρώτο (βλ. σχ.1.14), αλλά έχει την ίδια αρχή μ` αυτό Από το σχήμα εύκολα βρίσκουμε:



Σχήμα 1.14

$$x'_A = x_A \cos\varphi - y_A \sin\varphi$$
$$y'_A = x_A \sin\varphi + y_A \cos\varphi \qquad \textbf{(1.11)}$$

και από εδώ μπορούμε να βρούμε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς. Γι` αυτούς δεν χρειάζεται να λύσουμε το σύστημα (1.11). Αρκεί να αντικαταστήσουμε το φ με $-\varphi$ και τα x_A, y_A με x'_A, y'_A (γιατί;). Έτσι βρίσκουμε

$$x_A = x'_A \cos\varphi + y'_A \sin\varphi$$
$$y_A = -x'_A \sin\varphi + y'_A \cos\varphi \qquad \textbf{(1.12)}$$

Παράδειγμα Μ1.2. Σωματίδιο βρίσκεται στο επίπεδο στη θέση Α, οι συντεταγμένες του οποίου στο σύστημα Ο είναι x_A και y_A. Βρείτε τις συντεταγμένες του ίδιου σημείου σε σύστημα Ο', η αρχή του οποίου βρίσκεται στο σημείο x_O και y_O και οι άξονές του σχηματίζουν γωνία φ με τους άξονες του Ο (Σχήμα 1.15).