ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

1 Η έννοια της πιθανότητας

Ο όρος *πιθανότητα* χρησιμοποιείται σχεδόν σε καθημερινή βάση από όλους μας. Πολύ συχνά ακούμε για "την πιθανότητα να βρέξει" ή "την πιθανότητα η θερμοκρασία να φτάσει έως κάποιους βαθμούς" κ.λπ., εννοώντας ότι κάποιο γεγονός μπορεί να συμβεί ή να μην συμβεί. Για παράδειγμα ένα κέρμα έχει δυο όψεις, μια την *"Κ - κεφαλή"* και μια τα *"Γ - γράμματα"*. Έτσι αν στρίψουμε ένα τέτοιο κέρμα, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε με σιγουριά ποιο θα είναι το αποτέλεσμα, *Κ* ή *Γ*; Αν όμως στρίψουμε το κέρμα αρκετές φορές, περιμένουμε ότι περίπου στις μισές από αυτές τις δοκιμές να έχουμε ως αποτέλεσμα την *Κ*. Δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι η πιθανότητα, κατά το στρίψιμο ενός κέρματος, να πάρουμε μια *Κ* είναι 50% ή $1/2$ (μια στις δυο). Το ίδιο ισχύει, προφανώς και για την άλλη όψη, τα *Γ*. Μια περισσότερο μαθηματική προσέγγιση της έννοιας της πιθανότητας θα δώσουμε σε επόμενη παράγραφο.

Στατιστικές μελέτες, δηλαδή συλλογή στοιχείων, επεξεργασία και ανάλυση αυτών για εξαγωγή συμπερασμάτων, διεξάγονται καθημερινά σε πάρα πολλές δραστηριότητες του ανθρώπου, όπως στον οικονομικό και πολιτικό τομέα, στο εμπόριο στις επιστήμες, ιατρική, βιολογία πληροφορική, τηλεπικοινωνίες κλπ. Ο κλάδος της Στατιστικής Επιστήμης που ονομάζεται ***Αναλυτική Στατιστική*** απασχολείται, κυρίως, με την ανάλυση των αριθμητικών δεδομένων τα οποία έχουμε συλλέξει για τη διεξαγωγή κάποιας στατιστικής μελέτης. Περιλαμβάνει δε τεχνικές για την εξαγωγή συμπερασμάτων μέσα από την επεξεργασία ενός υποσυνόλου του υπό μελέτη *πληθυσμού*, το οποίο ονομάζεται *δείγμα*. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι διάφορες δημοσκοπήσεις πολιτικού περιεχομένου που διεξάγονται συχνά, όπου το *δείγμα* είναι συνήθως μικρότερο από 2.000 άτομα. Με βάση την αντίδραση και τις απαντήσεις των ατόμων αυτών εξάγονται συμπεράσματα για την τάση του συνόλου του εκλογικού σώματος, δηλαδή του *πληθυσμού*, που είναι περί τα 8 εκατομμύρια των ψηφοφόρων. Βέβαια η επιλογή του δείγματος δεν είναι αυθαίρετη, αλλά γίνεται μέσω επιστημονικών κριτηρίων και κανόνων, τα οποία ορίζει η Θεωρία της Δειγματοληψίας.

Γίνεται φανερό ότι, ο όρος πληθυσμός αναφέρεται στο σύνολο των στοιχείων πάνω στο οποίο διεξάγεται μια στατιστική μελέτη, ενώ ο όρος δείγμα αναφέρεται σε ένα μικρό, αλλά αντιπροσωπευτικό υποσύνολο του πληθυσμού.

Η αναλυτική στατιστική στηρίζεται κυρίως στη θεωρία των Πιθανοτήτων που μαζί με την Κανονική Κατανομή, την οποία θα αναλύσουμε διεξοδικά σε επόμενες παραγράφους, αποτελούν τη βάση της θεωρίας της δειγματοληψίας.

Η δειγματοληψία χρησιμοποιείται στην οικονομία και στις επιχειρήσεις, στο εμπόριο, στον τεχνολογικό τομέα κ.α., γενικά ως μια τεχνική εξαγωγής συμπερασμάτων και περαιτέρω ανάλυσης μιας υφιστάμενης κατάστασης, για τη λήψη αποφάσεων και χάραξης πολιτικών και μελλοντικών σχεδιασμών.

1.1 Τυχαίο πείραμα - γεγονότα – Δειγματικός χώρος

Θα μιλήσουμε στη συνέχεια για μερικές βασικές έννοιες της θεωρίας των πιθανοτήτων που είναι απαραίτητες στην ανάλυση των δειγμάτων και την εξαγωγή συμπερασμάτων από αυτά.

1) **Γεγονότα:** Δυο βασικές κατηγορίες γεγονότων (ή ενδεχομένων) υπάρχουν.
α) Εκείνα που είναι βέβαιο ότι θα πραγματοποιηθούν, όπως για παράδειγμα αν αφήσουμε στον αέρα μια πέτρα, αυτή θα πέσει στο έδαφος.
β) Εκείνα που ίσως πραγματοποιηθούν ίσως όχι, όπως για παράδειγμα κατά τη ρίψη ενός κέρματος να πάρουμε *Γ*. Αυτά τα γεγονότα συνδέονται πάντα με μια πιθανότητα.

2) **Τυχαίο Πείραμα:** Ένα πείραμα ονομάζεται τυχαίο αν μπορεί να επαναληφθεί όσες φορές θέλουμε χωρίς να μπορεί να προβλεφθεί το ακριβές αποτέλεσμά του κάθε φορά. Για παράδειγμα αν τραβήξουμε ένα χαρτί από μια τράπουλα, αν ρίξουμε ένα ζάρι ή ένα κέρμα κ.α.

3) **Δειγματικός Χώρος:** Δειγματικό χώρο ονομάζουμε το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος. Για παράδειγμα, κατά τη γέννηση ενός παιδιού ο δειγματικός χώρος είναι:
$\Omega = \{A, K\}$, όπου A = αγόρι και K = κορίτσι.
Στο ρίξιμο ενός ζαριού, έξι όψεων, ο δειγματικός χώρος είναι:
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Ένας δειγματικός χώρος μπορεί να είναι πεπερασμένος, δηλαδή να έχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, μπορεί όμως να είναι και άπειρος, δηλαδή να έχει άπειρο αριθμό στοιχείων.
Τα γεγονότα είναι υποσύνολα ενός δειγματικού χώρου. Για παράδειγμα κατά το ρίξιμο ενός ζαριού, το γεγονός A = "η ζαριά έδειξε περιττό αριθμό" είναι το υποσύνολο του Ω, δηλαδή $A = \{1, 3, 5\}$. Επίσης κατά τη γέννηση ενός παιδιού το γεγονός B = " το παιδί είναι κορίτσι", παριστάνεται από το υποσύνολο του Ω, το $B = \{K\}$.
Με όσα είπαμε πιο πάνω συμπεραίνουμε ότι ένα γεγονός είναι:
α. Απλό αν αποτελείται από ένα και μόνο στοιχείο.
β. Σύνθετο αν αποτελείται από περισσότερα του ενός στοιχεία. Έτσι ένα σύνθετο γεγονός μπορεί να αναλυθεί σε επί μέρους απλά γεγονότα.
Τώρα αν θέλουμε να πούμε ότι δυο γεγονότα A και B συμβαίνουν ταυτόχρονα, τότε λέμε ότι συμβαίνει η τομή τους και συμβολίζεται με $A \cap B$.
Αν συμβαίνει ένα από τα A ή B, τότε λέμε ότι συμβαίνει η ένωσή τους, συμβολικά $A \cup B$. Τέλος αν δεν συμβαίνει το A, τότε συμβαίνει το συμπλήρωμά του, το οποίο συμβολίζεται με A^c. Επίσης το γεγονός Ω συμβαίνει πάντα και ονομάζεται βέβαιο γεγονός, ενώ το κενό $\varnothing$ δεν συμβαίνει ποτέ και ονομάζεται αδύνατο γεγονός.
Αν δυο γεγονότα A και B είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή $A \cap B = \varnothing$, ονομάζονται ασυμβίβαστα ή αμοιβαία αποκλειόμενα, γιατί το να συμβεί το ένα αποκλείει την περίπτωση να συμβεί το άλλο. Τέλος, τα A και A^c ονομάζονται συμπληρωματικά γεγονότα και $A \cup A^c = \Omega$. Για παράδειγμα κατά τη ρίψη ενός ζαριού τα γεγονότα $A = \{2,6\}$ και $B = \{1,5\}$ είναι ασυμβίβαστα.

1.2 Μαθηματικός ορισμός της πιθανότητας

Η έννοια της πιθανότητας αναφέρεται πάντα σε κάποιο γεγονός, δηλαδή μιλάμε για την πιθανότητα να συμβεί κάποιο γεγονός A σε ένα συγκεκριμένο τυχαίο πείραμα που διεξάγεται. Έστω ότι ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι, δηλαδή χωρίς σκόπιμες παραποιήσεις ή άλλες κατασκευαστικές ατέλειες, ο δειγματικός χώρος, όπως γνωρίζουμε, είναι $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ και πριν τη ρίψη του ζαριού δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, αλλά είμαστε σίγουροι ότι θα είναι ένας από τους έξι αριθμούς του Ω, κάθε ένας εκ των οποίων, έχει την ίδια ευκαιρία με τους άλλους πέντε για να εμφανιστεί. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι αν ρίξουμε το ζάρι έξι φορές θα προκύψουν και οι έξι διαφορετικές όψεις του, αλλά αν επαναλάβουμε το πείραμα πολλές φορές, κάθε μια όψη του ζαριού θα εμφανιστεί περί το 1/6 του συνόλου των δοκιμών.

Έστω πως επαναλάβαμε το πείραμα της ρίψης του ζαριού n φορές και θεωρούμε επιτυχία την εμφάνιση της όψης με το 6, το οποίο στις n επαναλήψεις εμφανίστηκε k φορές. Το πηλίκο k/n ονομάζεται ***σχετική συχνότητα*** της εμφάνισης αυτής της όψης του ζαριού στις n επαναλήψεις και όπως προ-είπαμε αυτό θα συμβεί στο 1/6 των δοκιμών. Έτσι καθώς το πλήθος των ρίψεων του ζαριού γίνεται αυθαίρετα μεγάλο, η σχετική συχνότητα πλησιάζει το 1/6, το οποίο με μαθηματικούς όρους εκφράζεται από το όριο:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}=\frac{1}{6}.$$

Το παραπάνω όριο δίνει την πιθανότητα εμφάνισης του 6 κατά τη ρίψη ενός ζαριού και συμβολικά γράφουμε $P(6)=1/6$.

Ομοίως, $P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=1/6$.

Έτσι έχουμε τον ακόλουθο ορισμό της πιθανότητας:

Ορισμός. *Έστω ότι A είναι ένα γεγονός ενός δειγματικού χώρου Ω που προκύπτει από τη διεξαγωγή ενός πειράματος και k ο αριθμός των εμφανίσεών του σε n το πλήθος επαναλήψεις. Η πιθανότητα $P(A)$ εμφάνισης του γεγονότος A δίνεται από το όριο:*

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}. \tag{3.1}$$

Κατά συνέπεια $P(A)$ είναι η σχετική συχνότητα του γεγονότος A και αφού k είναι ο αριθμός των εμφανίσεών του στις n επαναλήψεις του πειράματος, ισχύει ότι $0\le k\le n$, ή $0\le\frac{k}{n}\le 1$ και έτσι $0\le\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}\le 1$.

Οπότε έχουμε:

(i) $0\le P(A)\le 1$.

(ii) Αν $A=\Omega$, τότε το A συμβαίνει πάντα, δηλαδή $P(A)=1$, ενώ $P(\varnothing)=0$.

(iii) Κάθε φορά που γίνεται ένα πείραμα, συμβαίνει είτε το γεγονός A ή το συμπλήρωμά του A^c. Αν σε n επαναλήψεις συμβεί το A στις k φορές, τότε το A^c θα συμβεί στις $n-k$ φορές και έτσι

$P\left(A^c\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-k}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)=1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n}$, δηλαδή

$$P\left(A^c\right)=1-P\left(A\right)$$

και

$$P\left(A\right)=1-P\left(A^c\right). \qquad (3.2)$$

(iv) Αν ένα πείραμα έχει n το πλήθος στοιχεία, $\Omega=\left\{a_1,a_2,...,a_n\right\}$, όπου κάθε a_i, $i=1,2,...n$ έχει τις ίδιες πιθανότητες εμφάνισης με όλα τα υπόλοιπα, δηλαδή ο δειγματικός χώρος Ω είναι <u>ομοιόμορφος</u> και αν $A=\left\{a_1,a_2,...,a_k\right\}$ είναι ένα γεγονός που αποτελείται από $k\le n$ αποτελέσματα του πειράματος, τότε

$$P\left(A\right)=k\cdot\frac{1}{n}=\frac{k}{n}.$$

Όταν αναφερόμαστε σε δειγματικό χώρο από δω και στο εξής η ομοιομορφία του θα είναι δεδομένη, δηλαδή κάθε απλό γεγονός του Ω θα έχει ίσες πιθανότητες να προκύψει με κάθε άλλο απλό γεγονός του χώρου. Με άλλα λόγια ένα ζάρι ή κέρμα είναι πάντα αμερόληπτο, μια τράπουλα έχει 52 χαρτιά, τέσσερις άσσους, τέσσερα δυάρια , τέσσερα … κλπ.

<u>Παράδειγμα</u>: Σε μια διαδικασία παραγωγής φορητών τηλεφωνικών συσκευών, μια ημερήσια παραγωγή αποτελείται από 800 τεμάχια, εκ των οποίων το 2% έχει κάποιο ελάττωμα. Αν από το σωρό μιας τέτοιας παραγωγής επιλέξουμε στην τύχη μια συσκευή, ποια η πιθανότητα αυτή να <u>μην</u> είναι ελαττωματική;

<u>Λύση</u>: Ο δειγματικός χώρος εδώ έχει 800 στοιχεία, δηλαδή την ημερήσια παραγωγή και το γεγονός $E=$"ελαττωματική συσκευή" αποτελείται από: $\frac{2}{100}\cdot 800=16$ στοιχεία, αφού οι δυο στις εκατό είναι ελαττωματικές. Έτσι $P\left(E\right)=\frac{16}{800}=0{,}02$.

Αυτό που μας ζητείται όμως είναι η πιθανότητα να συμβεί το συμπλήρωμα του E, ήτοι η $P\left(E^c\right)$, για την οποία έχουμε: $P\left(E^c\right)=1-P\left(E\right)=1-0{,}02=0{,}98$.

Αν δυο απλά γεγονότα A και B ενός τυχαίου πειράματος είναι ασυμβίβαστα, δηλαδή $A \cap B = \varnothing$, τότε η πιθανότητα να συμβεί το ένα ή το άλλο είναι:

$$P\left(A \text{ ή } B\right) = P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right). \tag{3.3}$$

Η σχέση (3.3) ισχύει και για περισσότερα των δυο γεγονότων και ονομάζεται **Κανόνας Πρόσθεσης**. Δηλαδή η πιθανότητα εμφάνισης ενός από τα δυο (ή περισσότερα) ασυμβίβαστα απλά γεγονότα είναι το άθροισμα των επί μέρους πιθανοτήτων.

Για παράδειγμα η πιθανότητα να εμφανιστεί, κατά τη ρίψη ενός ζαριού, το 1 ή το 3 ή το 5 είναι:

$$P\left(1 \text{ ή } 3 \text{ ή } 5\right) = P\left(1\right) + P\left(3\right) + P\left(5\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Στην περίπτωση που δυο απλά γεγονότα δεν είναι ασυμβίβαστα, δηλαδή $A \cap B \neq \varnothing$, οπότε $P\left(A \cap B\right) \neq 0$, τότε έχουμε:

$$P\left(A \text{ ή } B\right) = P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right). \tag{3.4}$$

1.3 Δεσμευμένη πιθανότητα

Κατά τη διεξαγωγή ενός τυχαίου πειράματος είναι πιθανό να γνωρίζουμε ότι έχει ήδη συμβεί κάποιο γεγονός. Ας δούμε αν και πόσο επηρεάζει αυτή η πληροφορία την πιθανότητα εμφάνισης ενός άλλου γεγονότος.

Παράδειγμα: Έστω ότι τραβάμε τυχαία ένα χαρτί από μια τράπουλα 52 χαρτιών. Η πιθανότητα το χαρτί που πήραμε να είναι A = «άσσος» είναι:

$$P\left(A\right) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Αντίθετα, αν μας πουν πως το χαρτί που πήραμε είναι φιγούρα, τότε η πιθανότητα να πάρουμε έναν άσσο είναι προφανώς μηδέν.

Άρα βλέπουμε ότι μιλάμε για δεσμευμένη πιθανότητα ενός γεγονότος A όταν ξέρουμε πως προηγήθηκε ένα άλλο γεγονός B. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα ως εξής:

Ορισμός: *Αν A και B είναι δυο οποιαδήποτε γεγονότα ενός δειγματικού χώρου με* $P(B) \succ 0$, *τότε η δεσμευμένη πιθανότητα, την οποία συμβολίζουμε με* $P\left(A / B\right)$, *του γεγονότος A δοθέντος ότι έγινε το B, δίνεται από τον τύπο:*

$$P(A/B) = \frac{P(A \ \text{και} \ B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{3.5}$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ο ακόλουθος κανόνας:

Κανόνας Πολλαπλασιασμού: Η πιθανότητα να εμφανιστούν ταυτόχρονα δυο απλά γεγονότα A και B, δίνεται από τη σχέση:

$$P(A \ \text{και} \ B) = P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) \tag{3.6}$$

Στο παράδειγμά μας με την τράπουλα, αν μας πουν ότι το χαρτί που πήραμε είναι Γ = «σπαθί», τότε ποια η πιθανότητα αυτό να είναι άσσος;

Όπως είναι γνωστό, υπάρχουν 13 σπαθιά και μόνον ο ένας άσσος στην τράπουλα είναι σπαθί, δηλαδή η πιθανότητα $P(A) = 1/13$, όση ακριβώς ήταν αρχικά.

Είναι συνεπώς φανερό ότι η πραγματοποίηση του γεγονότος Γ δεν επηρεάζει την ταυτόχρονη πραγματοποίηση του A. Στην περίπτωση αυτή τα γεγονότα A και Γ λέμε ότι είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.

Οπότε έχουμε:

$$P(A/\Gamma) = P(A) \ \text{ή} \ \frac{P(A \cap \Gamma)}{P(\Gamma)} = P(A).$$

Άρα

$$P(A \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma). \tag{3.7}$$

Γενικά θα λέμε ότι δυο γεγονότα A και Γ είναι ανεξάρτητα, όταν ισχύει ο τύπος (3.7) πιο πάνω και αντίστροφα.

Κλασικό παράδειγμα ανεξαρτησίας γεγονότων είναι η περίπτωση όπου ένα πείραμα επαναλαμβάνεται πολλές φορές, χωρίς το αποτέλεσμά του κάποια φορά να επηρεάζει το αποτέλεσμά του μια άλλη. Αν π.χ. ρίξουμε ταυτόχρονα δυο ζάρια, η εμφάνιση ενός 5 στο ένα ζάρι δεν επηρεάζει την ταυτόχρονη εμφάνιση οποιουδήποτε από τους αριθμούς 1, 2, …, 6 στο άλλο ζάρι. Ή αν παρατηρήσουμε τις γεννήσεις παιδιών σε μια πόλη, το γεγονός ότι μια γυναίκα έκανε κορίτσι, δεν επηρεάζει την πιθανότητα μιας άλλης γυναίκας να κάνει και αυτή κορίτσι.

1.4 Πιθανότητα τομής δυο ή περισσοτέρων γεγονότων

Ο ορισμός της δεσμευμένης πιθανότητας παρέχει μια γενική μέθοδο υπολογισμού της πιθανότητας $P(A \ \text{και} \ B)$, δηλαδή της τομής δυο γεγονότων.

Αν A και B είναι δυο οποιαδήποτε γεγονότα σε ένα δειγματικό χώρο Ω, τότε η πιθανότητα του γεγονότος $\left(A \ \kappa\alpha\iota \ B\right) = \left(A \cap B\right)$ μπορεί να υπολογιστεί από τους εξής δυο τύπους:

$$\text{(i)} \ P\left(A \ \kappa\alpha\iota \ B\right) = P\left(B\right) \cdot P\left(A / B\right)$$

$$\text{(ii)} \ P\left(A \ \kappa\alpha\iota \ B\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B / A\right).$$

Η σχέση (i) δίνεται απ' ευθείας από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, ενώ η σχέση (ii) δίνεται από την πρώτη αν απλά αλλάξουμε μεταξύ τους τα A και B, δηλαδή

$$P\left(A \ \kappa\alpha\iota \ B\right) = P\left(B \ \kappa\alpha\iota \ A\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B / A\right).$$

Έστω ότι A, B, Γ είναι τρία τυχαία γεγονότα για τα οποία ισχύει:

$P\left(A\right) \succ 0, \ \ P\left(B\right) \succ 0, \ \ P\left(\Gamma\right) \succ 0$, τότε για να υπολογίσουμε την

$$P\left(A \ \kappa\alpha\iota \ B \ \kappa\alpha\iota \ \Gamma\right) = P\left(\left(A \ \kappa\alpha\iota \ B\right) \ \kappa\alpha\iota \ \Gamma\right) = P\left(A \ \kappa\alpha\iota \ B\right) \cdot P\left(\Gamma / A \ \kappa\alpha\iota \ B\right)$$

$= P\left(A\right) \cdot P\left(B / A\right) \cdot P\left(\Gamma / A \ \kappa\alpha\iota \ B\right)$, (λόγω της (ii)).

Αφού λοιπόν το γεγονός $\left(A \ \kappa\alpha\iota \ B \ \kappa\alpha\iota \ \Gamma\right)$ είναι το ίδιο για όποια αλλαγή μεταξύ των A, B και Γ, βλέπουμε πως η $P\left(A \ \kappa\alpha\iota \ B \ \kappa\alpha\iota \ \Gamma\right)$ μπορεί να υπολογιστεί κατά έξι τρόπους, όσοι είναι δηλαδή και οι δυνατοί συνδυασμοί τοποθέτησης των A, B και Γ. Με τους συνδυασμούς θα ασχοληθούμε εκτενέστερα σε άλλη παράγραφο.

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A} \ \kappa\alpha\iota \ \mathrm{B} \ \kappa\alpha\iota \ \Gamma\right) = \begin{cases} \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{B} / \mathrm{A}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\Gamma / \mathrm{A} \ \kappa\alpha\iota \ \mathrm{B}\right) \\ \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\Gamma / \mathrm{A}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{B} / \mathrm{A} \ \kappa\alpha\iota \ \Gamma\right) \\ \mathrm{P}\left(\mathrm{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\Gamma / \mathrm{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{A} / \mathrm{B} \ \kappa\alpha\iota \ \Gamma\right) \\ \mathrm{P}\left(\mathrm{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{A} / \mathrm{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\Gamma / \mathrm{A} \ \kappa\alpha\iota \ \mathrm{B}\right) \\ \mathrm{P}\left(\Gamma\right) \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{A} / \Gamma\right) \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{B} / \mathrm{A} \ \kappa\alpha\iota \ \Gamma\right) \\ \mathrm{P}\left(\Gamma\right) \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{B} / \Gamma\right) \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{A} / \mathrm{B} \ \kappa\alpha\iota \ \Gamma\right) \end{cases}$$

Έτσι μπορούμε τώρα να δώσουμε ένα γενικό τύπο για n το πλήθος γεγονότα:

$$P\left(A_1 \ \kappa\alpha\iota \ A_2 \ \kappa\alpha\iota \cdots \kappa\alpha\iota \ A_n\right) =$$

$$= P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2 / A_1\right) \cdots P\left(A_n / A_1 \ \kappa\alpha\iota \ A_2 \ \kappa\alpha\iota \cdots \kappa\alpha\iota \ A_{n-1}\right). \quad (3.8)$$

<u>Παράδειγμα 1^ο^</u>: Ένα κουτί περιέχει πέντε άσπρες και οκτώ μαύρες μπάλες. Αν βγάλουμε στην τύχη τρεις μπάλες διαδοχικά, χωρίς επανατοποθέτηση εκείνης που βγαίνει κάθε φορά, ποια η πιθανότητα ότι θα εμφανιστούν στη σειρά, πρώτη άσπρη, δεύτερη μαύρη και η τρίτη άσπρη;

<u>Λύση</u>: Αν θέσουμε A = "1η άσπρη", B = "2η μαύρη" και $Γ$ = "3η άσπρη", θα έχουμε:

$$P\left(A \ \kappa\alpha\iota \ B \ \kappa\alpha\iota \ \Gamma\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B / A\right) \cdot P\left(\Gamma / A \ \kappa\alpha\iota \ B\right).$$

Αφού υπάρχουν 5 άσπρες στο σύνολο των 13 μπαλών, έχουμε ότι $P\left(A\right) = \frac{1}{13}$. Επίσης $P\left(B / A\right) = \frac{8}{12}$ είναι η πιθανότητα να πάρουμε μια από τις 8 μαύρες μπάλες στο σύνολο των δώδεκα που απέμειναν μετά την πρώτη προσπάθεια (A). Τέλος $P\left(\Gamma / A \ \kappa\alpha\iota \ B\right) = \frac{4}{11}$ είναι η πιθανότητα να πάρουμε μια από τις τέσσερις άσπρες μπάλες στο σύνολο των έντεκα, αφού έχουν γίνει δυο προσπάθειες (A και B).

Άρα $P\left(A \ \kappa\alpha\iota \ B \ \kappa\alpha\iota \ \Gamma\right) = \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{160}{1716} = 0{,}09324$.

<u>Παράδειγμα 2^ο^</u>: Έστω ότι τραβάμε τέσσερα χαρτιά από μια τράπουλα, χωρίς επανατοποθέτηση αυτού που βγαίνει κάθε φορά. Ποια η πιθανότητα να πάρουμε τέσσερις άσσους;

<u>Λύση</u>: Θέτουμε τα εξής γεγονότα , A_1 ="1ος άσσος", A_2 = "2ος άσσος", A_3 ="3ος άσσος", A_4= "4ος άσσος", οπότε ζητείται η πιθανότητα $P\left(A_1 \ \kappa\alpha\iota \ A_2 \ \kappa\alpha\iota \ A_3 \ \kappa\alpha\iota \ A_4\right)$.

Έτσι έχουμε:

$$P\left(A_1 \ \kappa\alpha\iota \ A_2 \ \kappa\alpha\iota \ A_3 \ \kappa\alpha\iota \ A_4\right) =$$

$$= P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2 / A_1\right) \cdot P\left(A_3 / A_1 \ \kappa\alpha\iota \ A_2\right) \cdot P\left(A_4 / A_1 \ \kappa\alpha\iota \ A_2 \ \kappa\alpha\iota \ A_3\right)$$

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} = \frac{24}{6.497.400} = 0{,}0000036 .$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το να τραβήξουμε σε τέσσερις προσπάθειες τέσσερις διαδοχικούς άσσους από μια τράπουλα 52 χαρτιών είναι εξαιρετικά απίθανο.

Παράδειγμα 3ο: Σε μια κληρωτίδα υπάρχουν οι αριθμοί 1 - 10. Ποια η πιθανότητα να βγει ο αριθμός 2 στην 7η κατά σειρά διαδοχική κλήρωση χωρίς επανατοποθέτηση του αριθμού που βγαίνει κάθε φορά;

Λύση: Η πιθανότητα ο αριθμός 2 να μην έρθει στις έξι πρώτες κληρώσεις είναι:

$$P_1 = \frac{9}{10},\ P_2 = \frac{8}{9},\ P_3 = \frac{7}{8},\ P_4 = \frac{6}{7},\ P_5 = \frac{5}{6},\ P_6 = \frac{4}{5}.$$

Τώρα η πιθανότητα ο αριθμός 2 να έρθει την έβδομη διαδοχική κλήρωση είναι: $P_7 = \frac{1}{4}$.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(2 \text{ στην } 7^{\eta} \text{ κλήρωση}) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 \cdot P_6 \cdot P_7 = \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

1.5 Θεώρημα ολικής πιθανότητας – *τύπος του Bayes*

Ο κανόνας της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού μαζί με την έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας, παίζουν σημαντικό ρόλο στο ***Θεώρημα του Bayes*** που θα αναπτύξουμε παρά κάτω. Ας αρχίσουμε με το εξής παράδειγμα:

Παράδειγμα 1ο: Έστω ότι σε ένα σύνολο 1.000 ατόμων, το 40% είναι άντρες, γεγονός *A* και το 60% είναι γυναίκες, γεγονός *Γ* και έστω ότι *B* είναι το γεγονός "άνω των 38 ετών".

Αν μας πουν ότι $P(B/\Gamma) = 0{,}35$, δηλαδή το 35% των γυναικών είναι άνω των 38 ετών και $P(B/A) = 0{,}55$, δηλαδή το 55% των αντρών είναι άνω των 38 ετών. Ποιο ποσοστό του συνόλου άνω των 38 ετών είναι γυναίκες; Δηλαδή ποια είναι η $P(\Gamma/B)$;

Από τον κανόνα του πολλαπλασιασμού έχουμε:

$$P(\Gamma \ \kappa\alpha\iota\ B) = P(\Gamma \cap B) = P(\Gamma/B)\cdot P(B) \Rightarrow$$

$$P(\Gamma/B) = \frac{P(\Gamma \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\Gamma)P(B/\Gamma)}{P(B)}.$$

Όμως η *P*(B) δεν είναι ακόμα γνωστή. Τώρα για οποιαδήποτε γεγονότα *B* και Γ έχουμε: