

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α΄ ΜΕΡΟΣ: ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Financial Mathematics)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Απλός Τόκος, (Simple Interest)	1
1.1 Εισαγωγή στην Ιδέα του Επιτοκίου	1
1.2 Υπολογισμός Απλού Τόκου	4
1.3 Πολιτικός, Εμπορικός και Μεικτός Χρόνος.....	5
1.4 Συνολικός Τόκος Κεφαλαίων Τοκισμένων με το ίδιο Επιτόκιο.....	8
1.5 Προκαταβολή Τόκου (Bank Discount, Advanced Payment of Interest).....	10
1.6 Προβλήματα Εύρεσης του Μέσου Επιτοκίου (Weighted Rate of Interest).....	11
1.7 Προεξόφληση Συναθληγματικών και Γραμματίων (Discounting).....	13
1.8 Εξωτερική Προεξόφληση Τίτλων	16
1.9 Εσωτερική Προεξόφληση Τίτλων.....	19
1.10 Υπολογισμός του προεξοφλήματος, όταν η Παρούσα Αξία του Τίτλου είναι Γνωστή	22
1.11 Η Έννοια του Πραγματικού Επιτοκίου Προεξόφλησης.....	24
1.12 Εύρεση της Παρούσας Αξίας από την Ονομαστική Αξία με Έξοδα	26
1.13 Πινάκιο Προεξοφλήσεων	27
1.14 Εξισώσεις Αξίας ή Ισοδυναμίας (Equation of Value)	30

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ανατοκισμός (Compound Interest)	35
2.1 Ανατοκισμός (Compounding).....	35
2.2 Τόκος στον Ανατοκισμό.....	38
2.3 Σύγκριση Απλού Τόκου και Ανατοκισμού	38
2.4 Πραγματική Αξία στον Ανατοκισμό	39
2.5 Υπολογισμός Πραγματικής Αξίας, όταν δίνεται ο Τόκος	40
2.6 Υπολογισμός Εσωτερικού Προεξοφλήματος στον Ανατοκισμό.....	40
2.7 Εύρεση Μέσου Επιτοκίου στον Ανατοκισμό	42
2.8 Οι Έννοιες των Αναλόγων και Ισοδυνάμων Επιτοκίων.....	43
α. ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ.....	43
β. ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ	44
2.9. Εύρεση της Τελικής Αξίας Κεφαλαίου, όταν ο χρόνος Ανατοκισμού είναι Κλάσματικός.....	50
2.9α Συνεχής Κεφαλοποίηση	52
2.10 Εξέταση Περιπτώσεων Ισοδυναμίας και Αντικατάστασης Γραμματίων	52
2.11 Προβλήματα Αντικατάστασης Τίτλων όταν η Εποχή Ισοδυναμίας είναι η Ημέρα Υπολογισμού.....	55

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Έκπτωση στον Απλό Τόκο και στον Ανατοκισμό (Discount with Simple or Compound Interest)	61
3.1 Απλή Έκπτωση και Συντελεστής Έκπτωσης.....	61
3.2 Σχέση μεταξύ Επιτοκίου (r) και Έκπτωσης (d) στον Απλό Τόκο.....	63
3.3 Επιταγές (Promissory notes).....	64

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ράντες (Annuities)	67
4.1 Εισαγωγικές Έννοιες.....	67

4.2	Υπολογισμός Αρχικής και Τελικής Αξίας μιας Ληξιπρόθεσμης Ράντας.....	71
4.3	Τελική Αξία Μοναδιαίας Ληξιπρόθεσμης Ράντας	72
4.4	Τελική Αξία Σταθερής Ληξιπρόθεσμης Ράντας	73
4.5	Αρχική Αξία Ληξιπρόθεσμης Μοναδιαίας Ράντας.....	74
4.6	Αρχική Αξία Ληξιπρόθεσμης Σταθερής Ράντας	76
4.7	Τελική Αξία Προκαταβλητέας Ράντας (Amount of an Annuity Due), $S_n(\text{due})$	81
4.8	Αρχική Αξία Προκαταβλητέας Ράντας.....	84
4.9	Μέλλουσα Ράντα (Deferred Annuity)	88
4.10	Εύρεση Αρχικής Αξίας Μέλλουσας Ληξιπρόθεσμης Ράντας	89
4.11	Τελική Αξία Μέλλουσας Ληξιπρόθεσμης Ράντας.....	91
4.12	Αρχική Αξία Δινεκών Ραντών (Present value of Perpetuities)	93

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Δάνεια (Loans) 99

5.1	Εισαγωγή.....	99
5.2	Βασικά Είδη Δανείων	100
5.3	Σύστημα Απόσβεσης Ενιαίου Ποσού	103
5.4	Σύστημα Απόσβεσης Ίσων Μερών Κεφαλαίου.....	104
5.5	Συστήματα Απόσβεσης Δανείου στα οποία το Τοκοχρεολύσιο Είναι Σταθερό (Amortization Plans)	109
5.6	Σύστημα Απόσβεσης Δανείου στο οποίο το Χρεολύσιο και ο Τόκος Είναι Σταθερές Ποσότητες.....	109
5.7	Απόσβεση Δανείου με το Σύστημα Κεφαλαίου Χρεολυσίας (Sinking Fund).....	114
5.8	Ομολογιακά Δάνεια	118
5.9	Στεγαστικά Δάνεια	121

Ασκήσεις που αφορούν τα κεφάλαια 1,2,3,4,5: Οικονομικά Μαθηματικά 123

Exercises related to chapters 1,2,3,4,5: Financial Mathematics 123

Β΄ ΜΕΡΟΣ: **ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Higher Mathematics)**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας (Elements of Linear Algebra) 133

6.1	Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων, Μέρος Α.....	133
6.2	Μέθοδος των Αντιθέτων Συντελεστών για τη Λύση ενός Συστήματος Εξισώσεων.....	137
6.3	Μοντέλα Συστημάτων Εισόδου-Εξόδου. Input-Output Models (Leontief Models).....	138
6.4	Γενική Θεωρία των Συστημάτων Εισόδου - Εξόδου του Leontief.....	140

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Πίνακες και Πράξεις μεταξύ αυτών (Elements of Matrix Theory) 145

7.1	Ορισμοί.....	145
7.2	Άθροισμα και Πολλαπλασιασμός Πινάκων επί Πραγματικό Αριθμό.....	149
7.3	Πολλαπλασιασμός πινάκων.....	151
7.4	Παράσταση Συστημάτων Γραμμικών Εξισώσεων με την Βοήθεια των Πινάκων....	155
7.5	Κανόνες Πολλαπλασιασμού Πινάκων.....	159
7.6	Δυνάμεις Πινάκων.....	160
7.7	Είδη Πινάκων και οι Ιδιότητές τους.....	160
7.8	Ορίζουσες.....	165
7.9	Κανόνας του Sarrus για τον Υπολογισμό μιας Ορίζουσας Τάξης 3.....	176
7.10	Βασικές Ιδιότητες των Οριζουσών.....	177
7.11	Ο Αντίστροφος ενός Πίνακα.....	183
7.12	Ιδιότητες Αντιστρόφου Πίνακα.....	187
7.13	Λύση Συστημάτων με Αντίστροφο Πίνακα.....	188
7.14	Εύρεση Αντιστρόφου Πίνακα.....	189

7.15	Εύρεση Αντιστρόφου Πίνακα με τη Βοήθεια Στοιχειωδών Πράξεων Γραμμών.....	193
------	--	-----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων, Μέρος Β' (Systems of Linear Equations (Part II)) 201

8.1	Λύση Συστήματος n εξισώσεων με n Αγνώστους με τον κανόνα του Cramer	201
8.2	Διερεύνηση Συστήματος 3 Εξισώσεων με 3 Αγνώστους.....	202
8.3	Λύση Ομογενών Συστημάτων (n) Εξισώσεων με (n) Αγνώστους.....	203
8.4	Λύση Γραμμικών Συστημάτων Προσφοράς και Ζήτησης (supply and demand analysis)	206
8.5	Λύση Γραμμικών Συστημάτων Ισότητας Κόστους Παραγωγής Προϊόντος και Εισοδήματος από Πωλήσεις (break - even analysis)	208
8.6	Λύση Γραμμικού Συστήματος με την Μέθοδο Απαλειφής του GAUSS - JORDAN.....	210

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Θεωρία Συνόλων (Elements of theory of sets) 215

9.1	Εισαγωγή.....	215
9.2	Πράξεις Μεταξύ Συνόλων	218

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Εισαγωγή στις Συναρτήσεις μιας Πραγματικής Μεταβλητής. Εφαρμογές στην Οικονομική Επιστήμη (Introduction to the Theory of Functions of one Real Variable) 223

10.1	Ορισμός Συνάρτησης μιας Πραγματικής Μεταβλητής.....	223
10.2	Αντίστροφος Συνάρτησης	225
10.3	Γραφικές Παραστάσεις Εξισώσεων δύο Μεταβλητών.....	229

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Όρια και Συνέχεια Συναρτήσεων (Limits and Continuity of Functions) 253

11.1	Εισαγωγή.....	253
11.2	Μερικά Θεωρήματα Σχετικά με την έννοια του ορίου	259
11.3	Συνέχεια Συναρτήσης	262
11.4	Αποτελέσματα που ισχύουν για συνεχείς συναρτήσεις.....	266

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

Παράγωγος Συναρτήσης μιας Μεταβλητής (The Derivative of a One Variable Function) 269

12.1	Εισαγωγή.....	269
12.2	Διαφορισμότητα και Συνέχεια Συναρτήσης	276
12.3	Ρυθμός Μεταβολής Συναρτήσης.....	278
12.4	Κανόνες Εύρεσης Παραγώγου	285
12.5	Εύρεση Παραγώγου Αθροίσματος Γινομένου και Πηλίκου Συναρτήσεων	288
12.6	Προβλήματα Ρυθμού Μεταβολής Συναρτήσης (Rate of change problems)	295
12.7	Παράγωγος Σύνθετης Συναρτήσης (The chain rule)	296
12.8	Ο Γενικευμένος Νόμος Δύναμης Συναρτήσης	299
12.9	Παράγωγοι Δεύτερης και Ανώτερης Τάξης μιας Συναρτήσης.....	303
12.10.1	Παράγωγος Πεπλεγμένων Συναρτήσεων	304
12.11	Γωνία Μεταξύ δύο Πεπλεγμένων Συναρτήσεων	306
12.12	Παράγωγος Αντιστρόφου Συναρτήσης	308
12.13	Ελαστικότητα Ζήτησης (Elasticity of demand).....	309
12.14	Διαφορικό Συναρτήσης	311
12.15	Γραμμικές Προσεγγίσεις Συναρτήσης.....	313

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

Βελτιστοποίηση Συνάρτησης μιας Μεταβλητής (Optimization of a real function of one real variable) 319

13.1	Εισαγωγή.....	319
13.2	Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου για την Εύρεση Ακροτάτων Σημείων.....	323
13.3	Τοπικά Ακρότατα Συνάρτησης.....	330
13.4	Κοίλεις και Κυρτές Συναρτήσεις Κριτήριο 2 ^{ης} Παραγώγου για Τοπικά Ακρότατα.....	331
13.5	Οι έννοιες της κατακόρυφης και Οριζόντιας Ασύμπτωτης μιας Συνάρτησης.....	337

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

Η Εκθετική & Λογαριθμική Συνάρτηση (Exponential and Logarithmic function) 343

14.1	Εισαγωγή.....	343
14.2	Ο αριθμός e	347
14.3	Παραγωγή Συναρτήσεων της Μορφής $y=e^{g(x)}$	347
14.4	Ορισμός και Ιδιότητες της Λογαριθμικής Συνάρτησης.....	348

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15

Ολοκλήρωση Συναρτήσεων (Integration) 357

15.1	Εισαγωγή - Αόριστο Ολοκλήρωμα.....	357
15.2	Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα.....	367
15.3	Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση.....	369
15.4	Ολοκλήρωση κατά Μέρη.....	372
15.5	Υπολογισμός της Επιφάνειας με Χρήση του Ολοκληρώματος.....	375
15.6	Οικονομικές Εφαρμογές της Ολοκλήρωσης.....	381
15.7	Υπολογισμός των μεγεθών: Πλεόνασμα παραγωγού και Πλεόνασμα Καταναλωτού.....	383
15.8	Περιθωριακή Ανάλυση (Marginal Cost, Marginal Revenue and Marginal Profit Analysis).....	390

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16

Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών (Real Functions of more than one real variable) 391

16.1	Εισαγωγή	391
16.2	Γραφικές Παραστάσεις Συναρτήσεων με δύο Μεταβλητές.....	392
16.3	Μερικές Παράγωγοι μιας Συνάρτησης δύο Μεταβλητών	396
16.4	Μέγιστα και Ελάχιστα Σημεία μιας Συνάρτησης Δύο Μεταβλητών.....	403
16.5	Μέθοδος Πολλαπλασιαστών Lagrange για τη Βελτίωση μιας Συνάρτησης	410

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17

Διαφορικές Εξισώσεις (differential equations) 417

17.1	Εισαγωγή	417
17.2	Διαφορικές Εξισώσεις με Χωριζόμενες Μεταβλητές (separable differential equations).....	421
17.3	Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις 1 ^{ης} Τάξης.....	425

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 18

Συνδυασμοί - Μεταθέσεις. Διωνυμικό Θεώρημα. (Combinations, Permutations, Binomial Theorem) 431

18.1	Θεμελιώδης Αρχή του Γινομένου (multiplication principle)	431
18.1.1	Θεμελιώδης αρχή γινομένου (multiplication principle).....	432
18.2	Μεταθέσεις (permutations)	433
18.3	Συνδυασμοί (Combinations).....	436
18.4	Το Διωνυμικό Θεώρημα (binomial theorem)	442

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 19

Επενδύσεις και Κριτήρια Αξιολόγησής τους. (Capital Budgeting) 447

19.1	Εισαγωγή.....	447
19.2	Κριτήρια Προεξόφλησης Χρηματικών Ροών.....	449

19.2.1 Κριτήριο Καθαρής Παρούσας Αξίας (Net Present Value)	449
19.2.2 Κριτήριο Εσωτερικού Συντελεστή Απόδοσης (Internal Rate of Return).....	452
19.3 Κριτήριο Χρόνου Επανάκτησης του κεφαλαίου (Payback period criterion)	454

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 20

Γραμμικός Προγραμματισμός. (Linear Programming) **459**

20.1 Εισαγωγή - Ορισμοί	459
20.2 Γεωμετρική Προσέγγιση Λύσης Απλών Προβλημάτων LP.....	460
20.3 Η Μέθοδος Simplex Λύσης Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού	464
20.4 Λύση Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού με τη Μέθοδο SIMPLEX	466
20.5 Το Διαδικό Πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού	470

ΠΙΝΑΚΕΣ που αφορούν το πρώτο μέρος:

Οικονομικά Μαθηματικά Κεφ. 1,2,3,4,5

(Tables related to chapters 1,2,3,4,5: Financial Mathematics).....	475
--	-----

ΠΙΝΑΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

που αφορούν το δεύτερο μέρος: Ανώτερα Μαθηματικά.

(Tables related to B' part: Higher Mathematics).....	489
--	-----

21.1 ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ.....	489
21.2 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	489
21.3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	491
21.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	492

Βιβλιογραφία που αφορά το πρώτο μέρος:

Οικονομικά Μαθηματικά Κεφ. 1,2,3,4,5.

(bibliography related to chapters 1,2,3,4,5: Financial Mathematics)

A. Ξενόγλωσση.....	493
B. Ελληνική.....	494

Βιβλιογραφία που αφορά το δεύτερο μέρος:

Ανώτερα Μαθηματικά

(bibliography on the second part: Higher Mathematics)

A. Ξενόγλωσση	495
B. Ελληνική.....	496