

# Α΄ ΜΕΡΟΣ: ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### Απλός Τόκος (Simple Interest)

#### 1.1 Εισαγωγή στην Ιδέα του Επιτοκίου

Ο τόκος (Interest,  $I$ ) μπορεί να θεωρηθεί σαν η χρηματική αμοιβή που πληρώνεται από κάποιο πρόσωπο ή οργανισμό που λέγεται δανειζόμενος (borrower) για τη χρήση ενός περιουσιακού στοιχείου, που λέγεται συνήθως *Κεφάλαιο* (*Capital, Principal, P*), που ανήκει σε ένα άλλο πρόσωπο ή οργανισμό. Η πληρωμή του τόκου δικαιολογείται και από κάποιον κίνδυνο (*risk*) που έχει εκείνος που δανείζει χρήματα (lender) να τα χάσει, αν ο δανειζόμενος δεν ανταποκριθεί στην επιστροφή των χρημάτων για οποιοδήποτε λόγο σε έναν ορισμένο χρόνο (time,  $t$ ). Ανάλογα με το ύψος του κινδύνου, της απώλειας ή της υποτίμησης του κεφαλαίου, ο δανειστής δανείζει τα χρήματά του με μεγαλύτερο ή μικρότερο ετήσιο επιτόκιο (Interest,  $I$ ). Τα παραπάνω εκφράζονται πιο κομψά στους ακόλουθους ορισμούς.

##### Ορισμός 1.1.1

Κεφάλαιο ( $P$ ) λέγεται το οικονομικό αγαθό που εκφράζεται σε μονάδες νομισμάτων κι έχει την ικανότητα να αυξάνεται.

##### Ορισμός 1.1.2

Χρόνος ( $t$ ) λέγεται το χρονικό διάστημα για το οποίο δανείζεται κάποιος ένα κεφάλαιο  $P$ . Εξυπακούεται ότι ο χρόνος μπορεί να είναι διακριτή μεταβλητή (discrete variable), όταν εκφράζεται σε χρόνια, μήνες, ημέρες, ή συνεχής μεταβλητή (continuous variable), όταν παίρνει τιμές στο διάστημα  $[t_1, t_2]$ .

**Ορισμός 1.1.3**

Τόκος (Interest,  $I$ ) λέγεται το ποσόν των χρημάτων που παίρνει ο δανειστής ενός κεφαλαίου  $C$  για χρόνο  $t$  από τον δανειζόμενο.

**Ορισμός 1.1.4**

Ετήσιο Επιτόκιο (annual rate of interest,  $r$ ) είναι ο τόκος για κεφάλαιο  $P=1$  νομισματικής μονάδας στη μονάδα του χρόνου. Συνήθως λαμβάνεται ως μονάδα χρόνου ο 1 χρόνος.

**Ορισμός 1.1.5**

Τελική αξία  $S$  ή ύψος ή μέλλουσα αξία (amount), or, future value) είναι το άθροισμα του κεφαλαίου  $P$  και του τόκου  $I$ . Ο ορισμός αυτός εκφράζεται με τον τύπο

$$S = P + I \quad (1.1.1)$$

**Ορισμός 1.1.6**

Κεφαλαιοποίηση του τόκου (Interest Capitalization) λέγεται η μετατροπή του τόκου σε κεφάλαιο και ο συμψηφισμός του σε αρχικό κεφάλαιο.

Υπάρχουν οι ακόλουθες δύο μορφές κεφαλοποίησης:

**Ορισμός 1.1.7**

Απλή κεφαλοποίηση λέγεται αυτή στην οποία ο παραγόμενος τόκος  $I$  από τοκισμό κεφαλαίου  $P$  σε χρόνο  $t$ , προστίθεται στο κεφάλαιο στο τέλος του χρονικού διαστήματος  $t$ . Στην περίπτωση αυτή ο τόκος  $I$  λέγεται *απλός τόκος* (Simple Interest), το δε αρχικό κεφάλαιο  $P$  παραμένει σταθερό για όλες τις περιόδους τοκισμού. Ο δανειστής αποσύρει τον απλό τόκο στο τέλος της χρονικής περιόδου  $t$ .

**Ορισμός 1.1.8**

*Σύνθετη κεφαλοποίηση* λέγεται αυτή στην οποία ο τόκος  $I$  που συσσωρεύεται από τον τοκισμό κεφαλαίου  $P$  για διάστημα  $t$  με ετήσιο επιτόκιο  $r$ ,



προστίθεται στο αρχικό κεφάλαιο  $P$  στο τέλος της χρονικής περιόδου  $t$ , έτσι ώστε στην επόμενη χρονική περίοδο υπάρχει προς τοκισμό το αρχικό κεφάλαιο  $P$  και ο τόκος της χρονικής περιόδου  $I$ . Αυτή η διαδικασία λέγεται *Ανατοκισμός* ή σύνθετος τόκος (Compound Interest).

### Αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας

Η λύση των προβλημάτων των Οικονομικών Μαθηματικών στηρίζεται στην ακόλουθη αρχή:

«Δυο άνισα ποσά χρημάτων σε ορισμένη χρονική στιγμή θεωρούνται ισοδύναμα».

Η ουσία της αρχής αυτής είναι ότι το χρήμα αναπτύσσεται σαν συνάρτηση του χρόνου.

#### **Παράδειγμα 1.1.1**

Η εταιρεία 3E δανείζεται από την Τράπεζα ΤΤ 1.000.00 € , με ετήσιο επιτόκιο 21% για ένα χρόνο. Η εταιρεία 3E πρέπει να επιστρέψει στην Τράπεζα ΤΤ ποσό 1.210.000 € μετά από ένα χρόνο.

Τη στιγμή  $t = 0$  που η Τράπεζα ΤΤ παραδίνει στην εταιρεία 3E το ποσό του 1.000.000 € υπάρχει ισοδυναμία (με οικονομική έννοια) μεταξύ του 1.000.000 € και του 1.210.000 €, οι οποίες θα καταβληθούν μετά από ένα χρόνο στην Τράπεζα ΤΤ. Επίσης, κατά το τέλος του ενός χρόνου που η εταιρεία 3E καταβάλλει στην Τράπεζα ΤΤ το ποσό των 1.210.000 € υπάρχει ισοδυναμία (με οικονομική έννοια) μεταξύ του ποσού 1.210.000 € και του ποσού 1.000.000 € τα οποία η εταιρεία 3E έλαβε πριν από ένα χρόνο.

#### **Ορισμός 1.1.9**

*Οικονομικές πράξεις* λέγονται οι Μαθηματικές πράξεις οι οποίες γίνονται στα προβλήματα των Οικονομικών Μαθηματικών, μεταξύ των διαφόρων οικονομικών μεγεθών, Κεφάλαιο, Τόκος, Επιτόκιο, Χρόνος κτλ. Οι πράξεις αυτές είναι δύο ειδών:

- α. *Βραχυπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις*, χρονικής διάρκειας 3, 6 μηνών ή το πολύ 1 χρόνου.

β. *Μακροπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις*, χρονικής διάρκειας μεγαλύτερης του 1 χρόνου.

## 1.2 Υπολογισμός Απλού Τόκου

Υποθέτουμε ότι κεφάλαιο  $P$  νομισματικών μονάδων στις οποίες μετρείται το επιτόκιο τοκίζεται για χρόνο  $t$  (μονάδες χρόνου) με επιτόκιο  $r$ , όπου  $r$  είναι ο τόκος 1 νομισματικής μονάδος στη μονάδα του χρόνου.

Άρα ο τόκος  $I$  του κεφαλαίου  $P$ , όταν τοκίζεται με απλό επιτόκιο  $r$  για χρόνο  $t$ , δίνεται από τον τύπο:

$$I = Prt \quad (1.2.1)$$

### Σημείωση 1.2.1

Τα μεγέθη  $P$ ,  $r$ ,  $t$  πρέπει να δηλωθούν κατά τρόπο συνεπή, δηλ., αν το επιτόκιο είναι ετήσιο, τότε ο χρόνος πρέπει να δηλωθεί σε χρόνια. Αν το επιτόκιο μετρείται σε μήνες, ο χρόνος πρέπει να δηλωθεί σε μήνες.

Αν το επιτόκιο είναι 16%, θα πρέπει να θέσουμε στον τύπο (1.2.1)  $r = 0,16$ .

Επίσης, το επιτόκιο  $r$  και το κεφάλαιο  $P$  πρέπει να αναφέρονται στις ίδιες νομισματικές μονάδες, δηλ. όταν το κεφάλαιο  $P$  είναι 500.000 €, το επιτόκιο 16% θα συμβολίζει τόκο 16 € στα 100 € για 1 χρόνο και ο χρόνος τοκισμού  $t$  θα εκφράζεται σε χρόνια.

Άρα στην απλή κεφαλοποίηση θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & \text{Τελική αξία κεφαλαίου} = \\ & = S = P + I = P + Prt = P(1 + rt) \end{aligned}$$

ή

$$S = P(1 + rt) \quad (1.2.2)$$

Όταν το επιτόκιο  $r$  είναι ετήσιο και ο χρόνος ( $m$ ) εκφράζεται σε μήνες  $n$  εξίσωση (1.2.1) γίνεται:

$$I = \frac{Prm}{12}, \quad (1.2.3)$$

και η εξίσωση (1.2.2) γίνεται:

$$S = P \left( 1 + \frac{rm}{12} \right).$$

Αν ο χρόνος (d) εκφράζεται σε ημέρες, η εξίσωση (1.2.1) γίνεται:

$$I = \frac{Prd}{365}, \quad (1.2.4)$$

και η εξίσωση (1.2.2) γίνεται:

$$S = P \left( 1 + \frac{rd}{365} \right) \quad (1.2.5)$$

### 1.3 Πολιτικός, Εμπορικός και Μεικτός Χρόνος

Στην εκτέλεση των βραχυπρόθεσμων οικονομικών πράξεων διακρίνουμε τρία είδη υπολογισμού των τοκοφόρων ημερών με βάση τα ακόλουθα τρία είδη ετών.

α. Το πολιτικό έτος, το οποίο έχει 365 ημέρες ή 366, αν είναι δίσεκτο (ο αριθμός των δυο τελευταίων ψηφίων του διαιρείται δια 4). Στο πολιτικό έτος κάθε μήνας περιλαμβάνει τον πραγματικό αριθμό των ημερών του, π.χ. 31 ο Ιανουάριος, 28 ή 29 ο Φεβρουάριος κ.τ.λ.

Το πολιτικό έτος εφαρμόζεται στην Αγγλία, στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής, στην Πορτογαλία και στις χώρες της Βρετανικής Κοινοπολιτείας.

Στην περίπτωση αυτή οι τύποι (1.2.4) και (1.2.5) παραμένουν όπως είναι.

β. Το εμπορικό ή λογιστικό έτος, το οποίο έχει 360 ημέρες και ο κάθε μήνας έχει 30 ημέρες. Το εμπορικό έτος χρησιμοποιείται στη Ρωσία, στη Γερμανία, στις χώρες της Σκανδιναβικής Χερσονήσου και στην Ελβετία, εκτός από την Γενεύη.

Στην περίπτωση αυτή οι τύποι (1.2.4) και (1.2.5) γίνονται, αντίστοιχα:

$$I = \frac{Prd}{360} \quad S = P \left( 1 + \frac{rd}{360} \right) \quad (1.3.1)$$

γ. Το μικτό έτος, το οποίο αποτελείται από 360 ημέρες και ο κάθε μήνας λαμβάνεται με τις πραγματικές του ημέρες. Το μικτό έτος εφαρμόζεται



στην Αυστρία, το Βέλγιο, τη Γαλλία, την Ελλάδα, την Ιταλία, την Ισπανία, την Ολλανδία και την περιοχή της Γενεύης στην Ελβετία.

Στην περίπτωση αυτή ισχύουν οι τύποι (1.3.1) στους οποίους ο αριθμός των ημερών  $d$  συμβολίζει τον αριθμό των ημερών σε ένα μικτό έτος.

Ο υπολογισμός του επιτοκίου και της τελικής αξίας είναι ακριβής μόνο αν λαμβάνεται ως βάση το πολιτικό έτος.

### Παράδειγμα 1.3.1

Κεφάλαιο  $P = 300.000$  € τοκίζεται με απλό επιτόκιο  $r = 8\%$  για  $t = 7$  χρόνια. Ποιος είναι ο τόκος και η τελική αξία;

#### Απάντηση

$$\text{Έχουμε: } I = 300.000 \cdot 0,08 \cdot 7 = 168.000 \text{ €}$$

$$S = P(1 + rt) = 300.000 (1 + 0,08 \cdot 7) = 468.000 \text{ €}$$

### Παράδειγμα 1.3.2

Να υπολογιστεί ο τόκος κεφαλαίου  $P = 300.000$  € που τοκίζεται από τις 2 Φεβρουαρίου 1996 ως τις 15 Απριλίου 1996 με επιτόκιο 15% με εμπορικό, πολιτικό και μικτό έτος.

#### Απάντηση

α) Όταν το έτος είναι πολιτικό, οι τοκοφόρες ημέρες βρίσκονται με χρήση του πίνακα I υπολογισμού τοκοφόρων ημερών, ως εξής:

Από 1.1.1996 ως 15.4.1996	105 ημέρες
Από 1.1.1996 ως 2.2.1996	– 33 ημέρες
	72 ημέρες
έτος δίσεκτο	$\frac{+1}{73}$

Άρα έχουμε

$$I = \frac{300.000 \cdot 73 \cdot 0,15}{365} = 9.000 \text{ €}$$

β) Όταν το έτος είναι εμπορικό, οι τοκοφόρες ημέρες είναι:

$$\text{Από 2.2.1996 ως 1.4.1996} \quad 2 \times 30 = 60 \text{ ημέρες}$$

$$\text{Από 2.4.1996 ως 15.4.1996} \quad (15-2) = 13 \text{ ημέρες}$$

$$73 \text{ ημέρες}$$

Άρα έχουμε:

$$I = \frac{300.000 \cdot 73 \cdot 0,15}{360} = 9.125 \text{ €}.$$

γ) Όταν το έτος είναι μικτό οι τοκοφόρες ημέρες είναι:

$$\text{Από 1.1.1996 ως 15.4.1996} \quad 105 \text{ ημέρες}$$

$$\text{Από 1.1.1996 ως 2.2.1996} \quad -33 \text{ ημέρες}$$

$$72 \text{ ημέρες}$$

$$\text{έτος δίσεκτο} \quad +1$$

$$73 \text{ ημέρες}$$

Άρα έχουμε:

$$I = \frac{300.000 \cdot 73 \cdot 0,15}{360} = 9.125 \text{ €}.$$

### Σημείωση 1.3.1

Η ημέρα της κατάθεσης δεν είναι τοκοφόρος, ενώ η ημέρα της ανάληψης είναι τοκοφόρος.

### **Παράδειγμα 1.3.3**

Κάποιος δανείσθηκε ένα ποσό από την Τράπεζα προς  $9 \frac{3}{4} \%$  το χρόνο. Μετά από 80 ημέρες, όταν το έτος είναι εμπορικό, πλήρωσε 850.000 €. Ποιο ήταν το αρχικό ποσό που δανείσθηκε;

### Απάντηση

$$\text{Έχουμε } S = 850.000$$

$$r = 9 \frac{3}{4} \%$$

$$d = 80$$

Άρα από τον τύπο:

$$S = P \left( 1 + \frac{rd}{360} \right)$$

έχουμε:

$$P = S \left( 1 + \frac{rd}{360} \right)^{-1} = 850.000 \left( 1 + \frac{80 \cdot (0,0975)}{360} \right)^{-1} = 931.973,9 \text{ €}.$$

**Σμείωση 1.3.2 :** Αν συμβολίσουμε με  $P$  το κεφάλαιο και  $d$  τον χρόνο (σε ημέρες) τοκισμού του, τότε έχουμε τους εξής ορισμούς:

#### Ορισμός 1.3.2.1

Το γινόμενο  $N=PD$  λέγεται Τοκάριθος

#### Ορισμός 1.3.2.2

Σταθερός διαιρέτης ονομάζεται το πηλίκο:  $D = \frac{360}{r}$  όταν πρόκειται για εμπορικό ή μεικτό έτος, ή  $D = \frac{365}{r}$ , όταν πρόκειται για πολιτικό έτος.

### 1.4 Συνολητικός Τόκος Κεφαλαίων Τοκισμένων με το ίδιο Επιτόκιο

Υποθέτουμε ότι τα  $\lambda$  κεφάλαια  $P_1, P_2, \dots, P_\lambda$  τοκίζονται με το ίδιο επιτόκιο  $r$ , για  $d_1, d_2, \dots, d_\lambda$  ημέρες. Τότε, ο συνολητικός τόκος είναι

$$I = (P_1 d_1 + P_2 d_2 + \dots + P_\lambda d_\lambda) \cdot \frac{1}{D} = \frac{\sum_{i=1}^{\lambda} P_i d_i}{D} \quad \hat{=} \quad \hat{=}$$

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{\lambda} N_i}{D}, \quad N_i = P_i \cdot d_i \quad (1.4.1)$$

Ο ακόλουθος πίνακας περιέχει τους σταθερούς διαιρέτες  $D$  για τα δύο έτη, εμπορικό και πολιτικό, και για μερικές τιμές επιτοκίων.

<b>Πίνακας 1.4.1</b>		
Σταθεροί διαιρέτες $D$ για τα δύο έτη, εμπορικό και πολιτικό και πολιτικό, και για μερικές τιμές επιτοκίων		
<b>Επιτόκιο</b>	<b>Εμπορικό Έτος</b>	<b>Πολιτικό Έτος</b>
$r$	$D = \frac{360}{r}$	$D = \frac{365}{r}$
0,01	36.000	36.500
0,02	18.000	18.250
0,03	12.000	12.166,6
0,04	9.000	9.125
0,05	7.200	7.300
0,06	6.000	6.083,3
0,07	5.142,8	5.214,2
0,08	4.500	4.562,5
0,09	4.000	4.055,5
0,10	3.600	3.650
0,20	1.800	1.825
0,25	1.440	1.460
0,28	1.285,7	1.303,5



### Παράδειγμα 1.4.1

Κεφάλαιο 200.000 € τοκίζεται για 110 ημέρες με επιτόκιο 8%. Να βρεθεί ο τόκος  $I$  και η τελική του αξία, όταν το έτος θεωρείται: α) εμπορικό και β) πολιτικό.

#### Απάντηση

α) Εμπορικό έτος

$$I = \frac{N}{D} = \frac{Pd}{r} = \frac{200.000 \cdot (110)}{\frac{360}{0,08}} = \frac{200.000 \cdot (110)}{4.500} = 4888,88 \text{ €}$$

$$S = 204888,88 \text{ €}$$

β) Πολιτικό έτος

$$I = \frac{N}{D} = \frac{Pd}{r} = \frac{200.000 \cdot (110)}{\frac{365}{0,08}} = 4821,91 \text{ €}$$

$$S = 204821,91 \text{ €}$$

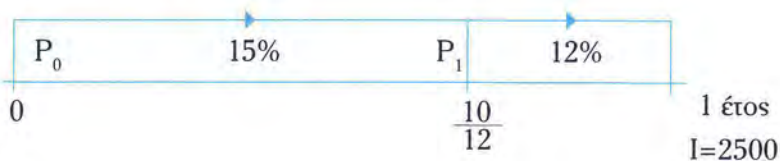
### Παράδειγμα 1.4.2

Ένα κεφάλαιο τοκίσθηκε, με 15% ετήσιο επί 10 μήνες. Μετά από 10 μήνες ο τόκος και το αρχικό κεφάλαιο (τοκοκεφάλαιο) τοκίσθηκε με 12% για 2 μήνες και παρήγαγε τόκο 2.500 €. Ζητείται να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο.

#### Απάντηση

Υποθέτουμε ότι  $P_0$  είναι το αρχικό κεφάλαιο και  $P_1$  είναι το κεφάλαιο και ο τόκος μετά από 10 μήνες.

Έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα:



Έχουμε:

$$\frac{P_1 \cdot 2 \cdot 0,12}{12} = 2.500$$

$$P_1 = 125.000$$

$$P_0 + \frac{P_0 \cdot 10,0,15}{12} = 125.000 \Rightarrow$$

$$12 \cdot P_0 + P_0 \cdot 10 \cdot 0,15 = 1.500.000 \Rightarrow P_0 \cdot (13,5) = 1.500.000 \Rightarrow$$

$$= \frac{1.500.000}{13,5} = 111.111,11 \text{ €}.$$

### 1.5 Προκαταβολή Τόκου (Bank Discount, Advanced Payment of Interest)

Όταν κάποιος δανείζεται ένα ποσό  $P$  από την Τράπεζα για χρόνο  $t$  με επίσημο επιτόκιο  $r$ , δεν παίρνει το ποσό που ζήτησε, αλλά τη διαφορά  $P-I$ , όπου  $I$  είναι ο τόκος του ποσού  $P$  προς επίσημο επιτόκιο  $r$  για χρόνο  $t$ . Το ποσό αυτό λέγεται  $P_{ελ}$  και δίνεται από τη σχέση:

$$P_{ελ} = P - I = P - Prt = P(1 - rt)$$

ή

$$P_{ελ} = P(1 - rt) \quad (1.5.1)$$

Όταν ο χρόνος δανεισμού είναι  $m$  μήνες, τότε έχουμε:

$$P_{ελ} = P \left( 1 - \frac{r}{12} \cdot m \right) \quad (1.5.2)$$

Όταν ο χρόνος δανεισμού είναι  $d$  ημέρες και το έτος είναι εμπορικό ή πολιτικό, έχουμε, αντίστοιχα:

$$P_{ελ} = P \left( 1 - \frac{r}{360} \cdot d \right) \quad (1.5.3)$$

$$P_{ελ} = P \left( 1 - \frac{r}{365} \cdot d \right) \quad (1.5.4)$$