

1

ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

(Simple Interest)

1.1 Εισαγωγή στην Ιδέα του Επιτοκίου

Ο τόκος (Interest, I) μπορεί να θεωρηθεί σαν η χρηματική αμοιβή που πληρώνεται από κάποιο πρόσωπο ή οργανισμό που λέγεται δανειζόμενος (borrower) για τη χρήση ενός περιουσιακού στοιχείου, που λέγεται συνήθως *Κεφάλαιο* (*Capital, Principal, P*), που ανήκει σε ένα άλλο πρόσωπο ή οργανισμό. Η πληρωμή του τόκου δικαιολογείται και από κάποιον κίνδυνο (*risk*) που έχει εκείνος που δανείζει χρήματα (lender) να τα χάσει, αν ο δανειζόμενος δεν ανταποκριθεί στην επιστροφή των χρημάτων για οποιοδήποτε λόγο σε έναν ορισμένο χρόνο (time, t). Ανάλογα με το ύψος του κινδύνου, της απώλειας ή της υποτίμησης του κεφαλαίου, ο δανειστής δανείζει τα χρήματά του με μεγαλύτερο

ή μικρότερο ετήσιο επιτόκιο (Interest, I). Τα παραπάνω εκφράζονται πιο κομψά στους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 1.1.1

Κεφάλαιο (P) λέγεται το οικονομικό αγαθό που εκφράζεται σε μονάδες νομισμάτων κι έχει την ικανότητα να αυξάνεται.

Ορισμός 1.1.2

Χρόνος (t) λέγεται το χρονικό διάστημα για το οποίο δανείζεται κάποιος ένα κεφάλαιο P . Εξυπακούεται ότι ο χρόνος μπορεί να είναι διακριτή μεταβλητή (discrete variable), όταν εκφράζεται σε χρόνια, μήνες, ημέρες, ή συνεχής μεταβλητή (continuous variable), όταν παίρνει τιμές στο διάστημα $[t_1, t_2]$.

Ορισμός 1.1.3

Τόκος (Interest, I) λέγεται το ποσόν των χρημάτων που παίρνει ο δανειστής ενός κεφαλαίου C για χρόνο t από τον δανειζόμενο.

Ορισμός 1.1.4

Ετήσιο Επιτόκιο (annual rate of interest, r) είναι ο τόκος για κεφάλαιο $P=1$ νομισματικής μονάδας στη μονάδα του χρόνου. Συνήθως λαμβάνεται ως μονάδα χρόνου ο 1 χρόνος.

Ορισμός 1.1.5

Τελική αξία S ή ύψος ή μέλλουσα αξία (amount, or, future value) είναι το άθροισμα του κεφαλαίου P και του τόκου I . Ο ορισμός αυτός εκφράζεται με τον τύπο

$$S = P+I \quad (1.1.1)$$

Ορισμός 1.1.6

Κεφαλαιοποίηση του τόκου (Interest Capitalization) λέγεται η μετατροπή του τόκου σε κεφάλαιο και ο συμψηφισμός του σε αρχικό κεφάλαιο.

Υπάρχουν οι ακόλουθες δύο μορφές κεφαλοποίησης:

Ορισμός 1.1.7

Απλή κεφαλοποίηση, λέγεται αυτή στην οποία ο παραγόμενος τόκος I από τοκισμό κεφαλαίου P σε χρόνο t , προστίθεται στο κεφάλαιο στο τέλος του χρονικού διαστήματος t . Στην περίπτωση αυτή ο τόκος I λέγεται **απλός τόκος** (Simple Interest), το δε αρχικό κεφάλαιο P παραμένει σταθερό για όλες τις περιόδους τοκισμού. Ο δανειστής αποσύρει τον απλό τόκο στο τέλος της χρονικής περιόδου t .

Ορισμός 1.1.8

Σύνθετη κεφαλοποίηση λέγεται αυτή στην οποία ο τόκος I που συσσωρεύεται από τον τοκισμό κεφαλαίου P για διάστημα t με ετήσιο επιτόκιο r , προστίθεται στο αρχικό κεφάλαιο P στο τέλος της χρονικής περιόδου t , έτσι ώστε στην επόμενη χρονική περίοδο υπάρχει προς τοκισμό το αρχικό κεφάλαιο P και ο τόκος της χρονικής περιόδου I . Αυτή η διαδικασία λέγεται **Ανατοκισμός** ή σύνθετος τόκος (Compound Interest).

1.1.α Αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας

Η λύση των προβλημάτων των Οικονομικών Μαθηματικών στηρίζεται στην ακόλουθη αρχή:

«Δυο άνισα ποσά χρημάτων σε ορισμένη χρονική στιγμή θεωρούνται ισοδύναμα».

Η ουσία της αρχής αυτής είναι ότι το χρήμα αναπτύσσεται σαν συνάρτηση του χρόνου.

Παράδειγμα 1.1.1

Η εταιρεία 3Ε δανείζεται από την Τράπεζα ΤΤ 1.000.00 ευρώ, με ετήσιο επιτόκιο 21% για ένα χρόνο. Η εταιρεία 3Ε πρέπει να επιστρέψει στην Τράπεζα ΤΤ ποσό 1.210.000 ευρώ μετά από ένα χρόνο.

Τη στιγμή $t = 0$ που η Τράπεζα ΤΤ παραδίνει στην εταιρεία 3Ε το ποσό του 1.000.000 ευρώ υπάρχει ισοδυναμία (με οικονομική έννοια) μεταξύ του 1.000.000 ευρώ και του 1.210.000 ευρώ, οι οποίες θα καταβληθούν μετά από ένα χρόνο στην Τράπεζα ΤΤ. Επίσης, κατά το τέλος του ενός χρόνου που η εταιρεία 3Ε καταβάλλει στην Τράπεζα ΤΤ το ποσό των 1.210.000 ευρώ υπάρχει ισοδυναμία (με οικονομική έννοια) μεταξύ του ποσού 1.210.000 ευρώ και του ποσού 1.000.000 ευρώ τα οποία η εταιρεία 3Ε έλαβε πριν από ένα χρόνο.

Ορισμός 1.1.9

Οικονομικές πράξεις λέγονται οι Μαθηματικές πράξεις οι οποίες γίνονται στα προβλήματα των Οικονομικών Μαθηματικών, μεταξύ των διαφόρων οικονομικών μεγεθών, Κεφάλαιο, Τόκος, Επιτόκιο, Χρόνος κτλ. Οι πράξεις αυτές είναι δύο ειδών:

- α. *Βραχυπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις*, χρονικής διάρκειας 3, 6 μηνών ή το πολύ 1 χρόνο.
- β. *Μακροπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις*, χρονικής διάρκειας μεγαλύτερης του 1 χρόνο.

1.2 Υπολογισμός Απλού Τόκου

Υποθέτουμε ότι κεφάλαιο P νομισματικών μονάδων στις οποίες μετρείται το επιτόκιο τοκίζεται για χρόνο t (μονάδες χρόνου) με επιτόκιο r , όπου r είναι ο τόκος 1 νομισματικής μονάδος στη μονάδα του χρόνου.

Άρα ο τόκος I του κεφαλαίου P , όταν τοκίζεται με απλό επιτόκιο r για χρόνο t , δίνεται από τον τύπο:

$$I = Prt \quad (1.2.1)$$

Σημείωση 1.2.1

Τα μεγέθη P , r , t πρέπει να δηλωθούν κατά τρόπο συνεπή, δηλ., αν το επιτόκιο είναι ετήσιο, τότε ο χρόνος πρέπει να δηλωθεί σε χρόνια. Αν το επιτόκιο μετρείται σε μήνες, ο χρόνος πρέπει να δηλωθεί σε μήνες.

Αν το επιτόκιο είναι 16%, θα πρέπει να θέσουμε στον τύπο (1.2.1.) $r = 0,16$.

Επίσης, το επιτόκιο r και το κεφάλαιο P πρέπει να αναφέρονται στις ίδιες νομισματικές μονάδες, δηλ. όταν το κεφάλαιο P είναι 500.000 ευρώ, το επιτόκιο 16% θα συμβολίζει τόκο 16 ευρώ στα 100 ευρώ για 1 χρόνο και ο χρόνος τοκισμού t θα εκφράζεται σε χρόνια.

Άρα στην απλή κεφαλοποίηση θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & \text{Τελική αξία κεφαλαίου} = \\ & = S = P + I = P + Prt = P(1 + rt) \\ & \text{ή} \end{aligned}$$

$$S = P(1 + rt) \quad (1.2.2)$$

Όταν το επιτόκιο r είναι ετήσιο και ο χρόνος (m) εκφράζεται σε μήνες η εξίσωση (1.2.1) γίνεται:

$$I = \frac{Prm}{12}, \quad (\text{σε χρόνια}) \quad (1.2.3)$$

και η εξίσωση (1.2.2) γίνεται:

$$S = P \left(1 + \frac{rm}{12} \right) \quad (\text{σε μήνες})$$

Αν ο χρόνος (d) εκφράζεται σε ημέρες, η εξίσωση (1.2.1) γίνεται:

$$I = \frac{Prd}{365}, \quad (1.2.4)$$

και η εξίσωση (1.2.2) γίνεται:

$$S = P \left(1 + \frac{rd}{365} \right) \quad (1.2.5)$$

Σημείωση 1.2.2.

Στην εκτέλεση των βραχυπρόθεσμων οικονομικών πράξεων διακρίνουμε τρία είδη υπολογισμού των τοκοφόρων ημερών με βάση τα ακόλουθα τρία είδη ετών.

- α. Το πολιτικό έτος, το οποίο έχει 365 ημέρες ή 366, αν είναι δίσεκτο (ο αριθμός των δυο τελευταίων ψηφίων του διαιρείται δια 4). Στο πολιτικό έτος κάθε μήνας περιλαμβάνει τον πραγματικό αριθμό των ημερών του, π.χ. 31 ο Ιανουάριος, 28 ή 29 ο Φεβρουάριος κ.τ.λ.

Το πολιτικό έτος εφαρμόζεται στην Αγγλία, στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής, στην Πορτογαλία και στις χώρες της Βρετανικής Κοινοπολιτείας.

Στην περίπτωση αυτή οι τύποι (1.2.4.) και (1.2.5) παραμένουν όπως είναι.

- β. Το εμπορικό ή λογιστικό έτος, το οποίο έχει 360 ημέρες και ο κάθε μήνας έχει 30 ημέρες. Το εμπορικό έτος χρησιμοποιείται στη Ρωσία, στη Γερμανία, στις χώρες της Σκανδιναβικής Χερσονήσου και στην Ελβετία, εκτός από την Γενεύη.

Στην περίπτωση αυτή οι τύποι (1.2.4) και (1.2.5) γίνονται, αντίστοιχα:

$$I = \frac{Prd}{360} \quad S = P \left(1 + \frac{rd}{360} \right) \quad (1.2.6)$$

- γ. Το μικτό έτος, το οποίο αποτελείται από 360 ημέρες και ο κάθε μήνας λαμβάνεται με τις πραγματικές του ημέρες. Το μικτό έτος εφαρμόζεται στην Αυστρία, το Βέλγιο, τη Γαλλία, την Ελλάδα, την Ιταλία, την Ισπανία, την Ολλανδία και την περιοχή της Γενεύης στην Ελβετία.

Στην περίπτωση αυτή ισχύουν οι τύποι (1.2.6) στους οποίους ο αριθμός των ημερών d συμβολίζει τον αριθμό των ημερών σε ένα μικτό έτος.

Ο υπολογισμός του επιτοκίου και της τελικής αξίας είναι ακριβής μόνο αν λαμβάνεται ως βάση το πολιτικό έτος.

Παράδειγμα 1.2.1

Κεφάλαιο $P = 300.000$ ευρώ τοκίζεται με απλό επιτόκιο $r = 8\%$ για $t = 7$ χρόνια. Ποιος είναι ο τόκος και η τελική αξία;

Απάντηση

$$\text{Έχουμε: } I = 300.000 \cdot 0,08 \cdot 7 = 168.000 \text{ ευρώ}$$

$$S = P(1 + rt) = 300.000 (1 + 0,08 \cdot 7) = 468.000 \text{ ευρώ}$$

Παράδειγμα 1.2.2

Να υπολογιστεί ο τόκος κεφαλαίου $P = 300.000$ ευρώ που τοκίζεται από τις 2 Φεβρουαρίου 1996 ως τις 15 Απριλίου 1996 με επιτόκιο 15% με εμπορικό, πολιτικό και μικτό έτος.

Απάντηση

α) Όταν το έτος είναι πολιτικό, οι τοκοφόρες ημέρες βρίσκονται με χρήση του πίνακα I υπολογισμού τοκοφόρων ημερών, ως εξής:

$$\text{Από } 1.1.1996 \text{ ως } 15.4.1996 \quad 105 \text{ ημέρες}$$

$$\text{Από } 1.1.1996 \text{ ως } 2.2.1996 \quad \underline{- 33 \text{ ημέρες}}$$

$$72 \text{ ημέρες}$$

$$\text{έτος δίσεκτο} \quad \underline{+1}$$

$$73$$

Αρα, έχουμε

$$I = \frac{300.000 \cdot 73 \cdot 0,15}{365} = 9.000 \text{ ευρώ}$$

β) Όταν το έτος είναι εμπορικό, οι τοκοφόρες ημέρες είναι:

$$\begin{array}{rcl} \text{Από 2.2.1996 ως 1.4.1996} & 2 \times 30 & = 60 \text{ ημέρες} \\ \text{Από 2.4.1996 ως 15.4.1996} & (15-2) & = 13 \text{ ημέρες} \\ & & \hline & & 73 \text{ ημέρες} \end{array}$$

Άρα έχουμε:

$$I = \frac{300.000 \cdot 73 \cdot 0,15}{360} = 9.125 \text{ ευρώ.}$$

γ) Όταν το έτος είναι μικτό οι τοκοφόρες ημέρες είναι:

$$\begin{array}{rcl} \text{Από 1.1.1996 ως 15.4.1996} & & 105 \text{ ημέρες} \\ \text{Από 1.1.1996 ως 2.2.1996} & & \frac{-33}{72} \text{ ημέρες} \\ & & \hline & & \text{έτος δίσεκτο} \quad \frac{+1}{73} \end{array}$$

Άρα έχουμε:

$$I = \frac{300.000 \cdot 73 \cdot 0,15}{360} = 9.125 \text{ ευρώ.}$$

Σημείωση 1.2.3

Η ημέρα της κατάθεσης δεν είναι τοκοφόρος, ενώ η ημέρα της ανάληψης είναι τοκοφόρος.

Παράδειγμα 1.2.3

Κάποιος δανείσθηκε ένα ποσό από την Τράπεζα προς $9 \frac{3}{4} \%$ το χρόνο. Μετά από 80 ημέρες, όταν το έτος είναι εμπορικό, πλήρωσε 850.000 ευρώ. Ποιο ήταν το αρχικό ποσό που δανείσθηκε;

Απάντηση

$$\text{Έχουμε } S = 850.000$$

$$r = 9 \frac{3}{4} \%$$

$$d = 80$$

Άρα από τον τύπο:

$$S = P \left(1 + \frac{rd}{360} \right)$$

Έχουμε:

$$P = S \left(1 + \frac{rd}{360} \right)^{-1} = 850.000 \left(1 + \frac{80 \cdot (0,0975)}{360} \right)^{-1} = 831.973,9 \text{ ευρώ.}$$

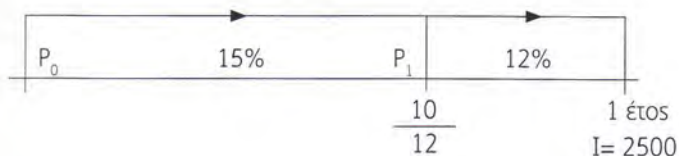
Παράδειγμα 1.2.4

Ένα κεφάλαιο τοκίσθηκε, με 15% επί 10 μήνες. Μετά από 10 μήνες ο τόκος και το αρχικό κεφάλαιο (τοκοκεφάλαιο) τοκίσθηκε με 12% για 2 μήνες και παρήγαγε τόκο 2.500 ευρώ. Ζητείται να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο.

Απάντηση

Υποθέτουμε ότι P_0 είναι το αρχικό κεφάλαιο και P_1 είναι το κεφάλαιο και ο τόκος μετά από 10 μήνες.

Έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα:



Έχουμε:

$$\frac{P_1 \cdot 2 \cdot 0,12}{12} = 2.500$$

$$P_1 = 125.000$$

$$P_0 + \frac{P_0 \cdot 10 \cdot 0,15}{12} = 125.000 \Rightarrow$$

$$12 \cdot P_0 + P_0 \cdot 10 \cdot 0,15 = 1.500.000 \Rightarrow P_0 \cdot (13,5) = 1.500 \Rightarrow$$

$$P_0 = \frac{1.500.000}{13,5} = 111.111,11 \text{ ευρώ}$$

1.3 Προκαταβολή Τόκου

Όταν κάποιος δανείζεται ένα ποσό P από την Τράπεζα για χρόνο t με ετήσιο επιτόκιο r , δεν παίρνει το ποσό που ζήτησε, αλλά τη διαφορά $P-I$, όπου I είναι ο τόκος του ποσού P προς ετήσιο επιτόκιο r για χρόνο t . Το ποσό αυτό λέγεται $P_{ελ}$ και δίνεται από τη σχέση:

$$P_{ελ} = P - I = P - Prt = P(1 - rt)$$

ή

$$P_{ελ} = P(1 - rt) \quad (1.3.1)$$

Όταν ο χρόνος δανεισμού είναι m μήνες, τότε έχουμε:

$$P_{ελ} = P \left(1 - \frac{r}{12} \cdot m \right) \quad (1.3.2)$$

Όταν ο χρόνος δανεισμού είναι d ημέρες και το έτος είναι εμπορικό ή πολιτικό, έχουμε, αντίστοιχα:

$$P_{ελ} = P \left(1 - \frac{r}{360} \cdot d \right) \quad (1.3.3)$$

$$P_{ελ} = P \left(1 - \frac{r}{365} \cdot d \right) \quad (1.3.4)$$

Παράδειγμα 1.3.1

Πόσα χρήματα θα πάρει από την Τράπεζα ένας πελάτης που δανείστηκε 300.000 ευρώ για 2 χρόνια με επιτόκιο 18% στην περίπτωση του απλού τόκου, μετά από την παρακράτηση των τόκων;