ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ

3.1 Εισαγωγή

Η σχεδίαση των ψηφιακών συστημάτων βασίζεται θεωρητικά στην Άλγεβρα των Διακοπτών (Switching Algebra). Η Άλγεβρα των Διακοπτών μπορεί να θεωρηθεί σαν μία ειδική περίπτωση της Άλγεβρας Boole (Boolean Algebra).

Η Άλγεβρα Boole παρουσιάσθηκε για πρώτη φορά από τον Άγγλο Μαθηματικό George Boole το έτος 1848 στο δοκίμιό του "The Mathematical Analysis of Logic" και στη συνέχεια το 1854 στο βιβλίο του "An Investigation of the Laws of Thought", σαν μαθηματικό εργαλείο για την περιγραφή των νόμων της λογικής. Η πρώτη εφαρμογή της Άλγεβρας Boole στη σχεδίαση λογικών κυκλωμάτων έγινε το 1938, από τον Claude Shannon. Στην ουσία ο Shannon χρησιμοποίησε μία δίτιμη Άλγεβρα Boole γνωστή σήμερα σαν Άλγεβρα Διακοπτών που καλύπτει την ανάλυση και τη σύνθεση συνδυαστικών (combinational) κυκλωμάτων, δηλαδή κυκλωμάτων των οποίων οι έξοδοι εξαρτώνται μόνο από τις παρούσες τιμές των εξόδων. Η Άλγεβρα των Διακοπτών εξελίχθηκε στην Θεωρία των Διακοπτών (Switching Theory) η οποία καλύπτει επί πλέον την ανάλυση και τη σύνθεση ακολουθιακών (sequential) κυκλωμάτων, δηλαδή κυκλωμάτων των οποίων οι έξοδοι εξαρτώνται από τις παρούσες αλλά και από τις παρελθούσες τιμές των εισόδων.

3.2 Άλγεβρα Boole

Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να οριστεί αξιωματικά η Άλγεβρα Boole. Ο πιο απλός τρόπος είναι ο αξιωματικός ορισμός που εισήχθη από τον Huntington το 1904, σύμφωνα με τον οποίο η *Άλγεβρα Boole* είναι μια αλγεβρική δομή, η οποία αποτελείται από ένα σύνολο στοιχείων *B* εφοδιασμένο με πράξεις, η αναπαράσταση των οποίων γίνεται με τη χρήση των τελεστών **+**, $\cdot$, $\overline{\ }$ και πληρεί τα αξιώματα που δίδονται στη συνέχεια.

Αξίωμα 3.1. *Κλειστότητα* του B ως προς τις πράξεις **+, ·** :
Για κάθε $x, y \in$B ισχύουν οι σχέσεις
$x+y \in$ B,
$x \cdot y \in$ B

Αξίωμα 3.2. *Ύπαρξη ουδετέρων στοιχείων* για τις πράξεις +, · στο σύνολο B.
Για κάθε $x \in$ B υπάρχουν στοιχεία 0,1 $\in$B, έτσι ώστε
$x+0 = x \in$ B,
$x \cdot 1 = x \in$ B

Αξίωμα 3.3. *Αντιμεταθετική ιδιότητα*
Για κάθε $x, y \in$ B ισχύουν οι σχέσεις
$x+y=y+x$,
$x \cdot y=y \cdot x$

Αξίωμα 3.4. Προσεταιρισμού
Για κάθε $x, y, z \in$ B ισχύουν οι σχέσεις
$x+(y+z)=(x+y)+z$
$x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z$

Αξίωμα 3.5. Επιμεριστική ιδιότητα
Για κάθε $x, y, z \in$B ισχύουν οι σχέσεις
$x \cdot (y+z)=x \cdot y+x \cdot z$
$x+y \cdot z=(x+y) \cdot (x+z)$

Αξίωμα 3.6. Ύπαρξη συμπληρώματος
Για κάθε στοιχείο $x \in$B**,** υπάρχει $\bar{x} \in B$, που λέγεται *συμπλήρωμα* (*complement*) του x, τέτοιο ώστε
$x + \bar{x} = 1$
$x \cdot \bar{x} = 0$

Αξίωμα 3.7.
Υπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία $x, y \in$B, τέτοια ώστε:
$x \neq y$.

3.2.1 Δυισμός

Τα αξιώματα του Huntington έχουν παρουσιαστεί σαν ζεύγη τα οποία προκύπτουν το ένα από το άλλο με ανταλλαγή του **+** με το **·** και του 0 με το 1. Επομένως ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1. Δυϊσμού
Έστω ότι ισχύει μια πρόταση της Άλγεβρας Boole, τότε ισχύει και η δυική της πρόταση, δηλαδή αυτή που προκύπτει με την εναλλαγή του **+** με το · και του 0 με το 1.

3.2.2 Βασικά Θεωρήματα της Άλγεβρας Boole

Θεώρημα 3.2. Μοναδικότητας
α) Τα στοιχεία 0 και 1 είναι μοναδικά.
β) Το συμπλήρωμα $\overline{x}$ του x είναι μοναδικό.

Θεώρημα 3.3
Για κάθε $x \in$Β ισχύουν οι σχέσεις
$x+x=x, \quad x \cdot x=x$

Θεώρημα 3.4
Για κάθε $x \in$ Β ισχύουν οι σχέσεις
$x+1=1, \quad x \cdot 0=0$

Θεώρημα 3.5
Για τα 0 και 1 ισχύουν οι σχέσεις
$\overline{0}=1, \quad \overline{1}=0$

Θεώρημα 3.6. Απορρόφησης
Για κάθε $x, y \in$Β ισχύουν οι σχέσεις
$x+x \cdot y=x$
$x \cdot (x+y)=x$

Θεώρημα 3.7
Για κάθε $x \in$ Β ισχύει η σχέση
$\overline{\overline{x}} = x$

Θεώρημα 3.8
Για κάθε $x, y \in$ Β ισχύουν οι σχέσεις
$x+\overline{x} \cdot y = x + y$
$x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$

Θεώρημα 3.9. *De Morgan*
Για κάθε $x, y \in$ Β ισχύουν οι σχέσεις
$\overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$

3.2.3 Θεωρήματα της Άλγεβρας Boole για πολλές μεταβλητές

Θεώρημα 3.10
Για κάθε $x \in B$ ισχύουν οι σχέσεις
$\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n} = x$
$\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n} = x$

Θεώρημα 3.11. Θεώρημα De Morgan για πολλές μεταβλητές

Για κάθε $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0 \in B$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\overline{x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot \ldots \cdot x_0} = \overline{x}_{n-1} + \overline{x}_{n-2} + \ldots + \overline{x}_0$$

$$\overline{x_{n-1} + x_{n-2} + \ldots + x_0} = \overline{x}_{n-1} \cdot \overline{x}_{n-2} \cdot \ldots \cdot \overline{x}_0$$

3.2.4 Αποδείξεις των θεωρημάτων της Άλγεβρας Boole

Απόδειξη του θεωρήματος 3.1

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι προφανής διότι τα αξιώματα έχουν δοθεί σαν ζεύγη των οποίων το ένα μέλος προκύπτει από το άλλο με ανταλλαγή του + με το · και του 0 με το1.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.2

(α) Μοναδικότητα των 0 και 1

Έστω ότι υπάρχουν δύο μηδενικά στοιχεία στο σύνολο *B* τα 0_1, 0_2. Τότε σύμφωνα με το αξίωμα 3.2 ισχύουν οι επόμενες σχέσεις

$0_1+0_2=0_1$

$0_2+0_1=0_2$

Σύμφωνα με το αξίωμα 3.3 ισχύει η σχέση $0_1+0_2=0_2+0_1$, άρα $0_1=0_2$.
Δηλαδή υπάρχει ένα μόνο ουδέτερο μηδενικό στοιχείο.
Η απόδειξη της μοναδικότητας του 1 γίνεται δυικά.

(β) Μοναδικότητας του $\overline{x}$

Έστω ότι υπάρχουν δύο συμπληρώματα του *x* στο B τα $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$. Τότε σύμφωνα με το αξίωμα 3.2 ισχύουν οι σχέσεις

$x+\overline{x}_1 = 1$, $x+\overline{x}_2 = 1$, $x\cdot\overline{x}_1 = 0$, $x\cdot\overline{x}_2 = 0$

Ισχύει $\overline{x}_2 = 1\cdot\overline{x}_2$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.2)

$= (x+\overline{x}_1)\cdot\overline{x}_2$ (Υπόθεση)

$= x\cdot\overline{x}_2 + \overline{x}_1\cdot\overline{x}_2$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.4)

$= 0 + \overline{x}_1\cdot\overline{x}_2$ (Υπόθεση)

$= x\cdot\overline{x}_1 + \overline{x}_1\cdot\overline{x}_2$ (Υπόθεση)

$= x\cdot\overline{x}_1 + \overline{x}_1\cdot\overline{x}_2$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.3)

$= (x+\overline{x}_2)\cdot\overline{x}_1$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.6)

$= 1\cdot\overline{x}_1$ (Υπόθεση)

$= \overline{x}_1$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.2)

Επομένως υπάρχει ένα μόνο συμπλήρωμα του *x*.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.3

Ισχύει $x + x = (x + x)\cdot 1$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.2)

$= (x + x)\cdot(x + \bar{x})$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.5)

$= x + x\cdot\bar{x}$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.4)

$= x + 0$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.6)

$= x$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.2)

Η απόδειξη της σχέσης $x\cdot x = x$ γίνεται δυικά.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.4

Ισχύει $x + 1 = x + x + \bar{x}$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.6)

$= x + \bar{x}$ (Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3)

$= 1$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.6)

Η απόδειξη της σχέσης $x\cdot 0 = 0$ γίνεται δυικά.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.5

$\bar{0} = \bar{0} + 0$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.2)

$= 1$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.6)

Η απόδειξη της σχέσης $\bar{1} = 0$ γίνεται δυικά.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.6

$x + x\cdot y = x\cdot 1 + x\cdot y$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.2)

$= x\cdot(1 + y)$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.4)

$= x\cdot 1$ (Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4)

$= x$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.2)

Η απόδειξη της σχέσης $x\cdot(x + y) = x$ γίνεται δυικά.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.7

Έστω $\bar{\bar{x}} = y$. Τότε

$\bar{x} + y = 1$ και $\bar{x}\cdot y = 0$ (Αξίωμα 3.5)

Αλλά

$x + \bar{x} = 1$ και $x\cdot\bar{x} = 0$ (Αξίωμα 3.5)

Τα x και y ικανοποιούν το αξίωμα 3.5 σαν συμπλήρωμα του $\bar{x}$ και με βάση το θεώρημα 3.2 (β) $x=y$.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.8

Ισχύει $x+\bar{x}\cdot y=(x+\bar{x})\cdot(x+y)$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.4)

$= 1\cdot(x+y)$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.6)

$= x+y$ (Σύμφωνα με το Αξίωμα 3.2)

Η απόδειξη της σχέσης $x\cdot(\bar{x}+y)=x\cdot y$ γίνεται δυικά.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.9

Για να αποδείξουμε ότι $\overline{x+y}=\bar{x}\cdot\bar{y}$ θα δείξουμε ότι $(x+y)+\bar{x}\cdot\bar{y}=1$ και $(x+y)\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}=0$.

Πράγματι

$$
\begin{aligned}
(x+y)+\bar{x}\cdot\bar{y} &= [(x+y)+\bar{x}]\cdot[(x+y)+\bar{y}] && \text{(Αξίωμα 3.5)}\\
&= [(y+x)+\bar{x}]\cdot[(x+y)+\bar{y}] && \text{(Αξίωμα 3.3)}\\
&= [y+(x+\bar{x})]\cdot[x+(y+\bar{y})] && \text{(Αξίωμα 3.4)}\\
&= (y+1)\cdot(x+1) && \text{(Αξίωμα 3.6)}\\
&= 1\cdot 1 && \text{(Θεώρημα 3.4)}\\
&= 1 && \text{(Θεώρημα 3.3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x+y)\cdot\bar{x}\cdot\bar{y} &= x\cdot(\bar{x}\cdot\bar{y})+y\cdot(\bar{x}\cdot\bar{y}) && \text{(Αξίωμα 3.5)}\\
&= x\cdot(\bar{x}\cdot\bar{y})+y\cdot(\bar{y}\cdot\bar{x}) && \text{(Αξίωμα 3.3)}\\
&= (x\cdot\bar{x})\cdot\bar{y}+(y\cdot\bar{y})\cdot\bar{x} && \text{(Αξίωμα 3.5)}\\
&= 0\cdot\bar{y}+0\cdot\bar{x} && \text{(Αξίωμα 3.6)}\\
&= 0+0 && \text{(Θεώρημα 3.4)}\\
&= 0 && \text{(Θεώρημα 3.3)}
\end{aligned}
$$

(β) Απόδειξη της σχέσης $\overline{x\cdot y}=\bar{x}+\bar{y}$

Σύμφωνα με το προηγούμενο ισχύει $\overline{a+b}=\bar{a}\cdot\bar{b}$

Για $a=\bar{x}$ και $b=\bar{y}$ ισχύει

$$
\begin{aligned}
\overline{\bar{x}+\bar{y}} &= \bar{\bar{x}}\cdot\bar{\bar{y}}\\
&= x\cdot y \quad \text{(Θεώρημα 3.7)}
\end{aligned}
$$

Επομένως

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

3.2.5 Άλγεβρα Διακοπτών

Η *Άλγεβρα Διακοπτών* είναι ένα σύνολο B = {0, 1} το οποίο είναι εφοδιασμένο με τις λογικές πράξεις **+**, $\cdot$, και $\overline{\ \ }$, οι οποίες για κάθε x, $y \in \{0, 1\}$ ορίζονται όπως στη συνέχεια

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

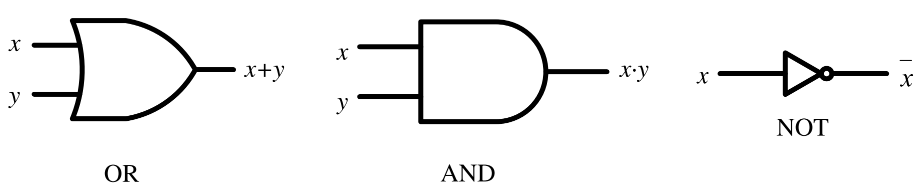
x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Για την Άλγεβρα των Διακοπτών ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.13. Η Άλγεβρα Διακοπτών είναι μία δίτιμη Άλγεβρα Boole.

Στην Άλγεβρα Διακοπτών οι λογικές πράξεις +, $\cdot$, $\overline{\ \ }$ ονομάζονται αντίστοιχα OR, AND, NOT (συμπλήρωμα). Αρχικά τα κυκλώματα με τα οποία πραγματοποιούνταν οι παραπάνω λογικές πράξεις ήταν οι ηλεκτρονόμοι (ρελέ). Στη συνέχεια δημιουργήθηκαν ειδικά ηλεκτρονικά κυκλώματα, οι λογικές πύλες, από τις οποίες ονομάστηκε OR αυτή που πραγματοποιεί την λογική πράξη "+", AND αυτή που πραγματοποιεί την λογική πράξη "·", και NOT αυτή που πραγματοποιεί το συμπλήρωμα των 0, 1. Στο σχήμα 3.1 δίδονται τα λογικά σύμβολα των πυλών OR, AND δύο εισόδων και της πύλης NOT. Η πύλη NOT λέγεται και Inverter (Αντιστροφέας).



Σχήμα 3.1 *Βασικές λογικές πύλες*

3.3 Λογικές Συναρτήσεις

Έστω ότι $\left\langle B,+,\cdot,^{-}\right\rangle$ είναι μια Άλγεβρα Boole. Τότε κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση $f : B^n \to B$, ορίζει μια *συνάρτηση Boole*, $f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0)$, με $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0 \in B$. Το πεδίο ορισμού της *f* είναι το Καρτεσιανό Γινόμενο $B^n = \underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{n}$.

Ειδικότερα, για την Άλγεβρα των Διακοπτών, όπου $B = \{0, 1\}$ κάθε μονοσήμαντη απεικόνιση $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, ορίζει μια *λογική συνάρτηση* (*logic function*) $f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0)$. Τα $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0 \in \{0,1\}$ ονομάζονται *λογικές μεταβλητές* (*logic variables*). Το Καρτεσιανό Γινόμενο $\{0,1\}^n =$ $\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n}$, περιλαμβάνει 2^n στοιχεία και είναι το *πεδίο ορισμού* της *f*. Το *πεδίο τιμών* της *f* είναι το σύνολο {0, 1} δηλαδή η συνάρτηση *f* για κάθε ένα από τα 2^n σημεία του πεδίου ορισμού τη μπορεί να πάρει την τιμή 0 και 1.

3.3.1 Παραστάσεις Λογικών Συναρτήσεων

Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να περιγράψουμε μια λογική συνάρτηση. Από αυτούς, δίδονται στη συνέχεια οι δύο βασικοί, που είναι οι παραστάσεις με πίνακες αληθείας και με λογικές παραστάσεις.

Παράσταση με Πίνακες Αληθείας

Οι λογικές συναρτήσεις μπορούν να παρασταθούν με πίνακες αληθείας. *Πίνακας Αληθείας* (*Truth Table*) μιας λογικής συνάρτησης είναι ένας πίνακας, ο οποίος περιλαμβάνει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των τιμών των μεταβλητών της και για κάθε συνδυασμό δίνεται η τιμή της συνάρτησης. Για *n* μεταβλητές ο πίνακας αληθείας έχει 2^n γραμμές.

Παράδειγμα 3.1. Στη συνέχεια δίδεται ο πίνακας αληθείας της λογικής συνάρτησης $f(x_2, x_1, x_0)$ για την οποία ισχύει *f*=1 εάν άρτιος αριθμός μεταβλητών x_i έχει την τιμή 1, και $f = 0$, εάν περιττός αριθμός μεταβλητών x_i έχει την τιμή 1. Το 0 θεωρείται άρτιος αριθμός.

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Μη *πλήρως καθορισμένη λογική συνάρτηση* είναι αυτή της οποίας η τιμή δεν είναι καθορισμένη για κάποιους συνδυασμούς τιμών των εισόδων. Η τιμή της συνάρτησης για αυτές τις τιμές ονομάζεται "don't care" και συμβολίζεται με X (ή d, ή -).

Παράδειγμα 3.2. Στη συνέχεια δίδεται ο πίνακας αληθείας μιας μη πλήρως καθορισμένης λογικής συνάρτησης $f(x_2, x_1, x_0)$.

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	X
0	1	1	1
1	0	0	X
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Λογικές Παραστάσεις

Οι *λογικές παραστάσεις* (*switching expressions*) χρησιμοποιούνται για να περιγραφούν αλγεβρικά πλήρως καθορισμένες λογικές συναρτήσεις με τον ίδιο τρόπο που οι αλγεβρικές παραστάσεις χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση των αλγεβρικών συναρτήσεων. Στη δομή τους οι λογικές παραστάσεις είναι παρόμοιες με τις αλγεβρικές παραστάσεις με μόνη διαφορά της χρήσης του επί πλέον τελεστή συμπληρώματος.

Οι λογικές παραστάσεις είναι παραθέσεις συμβόλων που δημιουργούνται από δυαδικές μεταβλητές, τους τελεστές +, ˙, $\overline{\ }$ και τις παρενθέσεις ( ) και προκύπτουν σύμφωνα με τους επόμενους κανόνες.

1. Τα σύμβολα 0, 1 είναι λογικές παραστάσεις.
2. Κάθε σύμβολο που παριστάνει μία δυαδική μεταβλητή είναι λογική παράσταση.
3. Εάν *A* και *B* είναι λογικές παραστάσεις, τότε
   - $\overline{A}$ είναι λογική παράσταση
   - (A)+(B) είναι λογική παράσταση
   - (A)˙(B) είναι λογική παράσταση

Παράδειγμα 3.3. Για $x_i \in \{0,1\}$ οι εκφράσεις $f_1 = x + y \cdot z$, $f_2 = x \cdot y + z \cdot \overline{w}$ είναι λογικές παραστάσεις ενώ η έκφραση $f_3 = x + y \cdot z +$ δεν είναι λογική παράσταση.

Ορισμένες παρενθέσεις μπορούν να απαλειφθούν από τις λογικές παραστάσεις εάν εφαρμοσθούν:

α) Οι *κανόνες προτεραιότητας λογικών πράξεων* σύμφωνα με τους οποίους η λογική πράξη $\overline{\ }$ προηγείται της λογικής πράξης $\cdot$, η οποία προηγείται της λογικής πράξης +.

β) Η προσεταιριστικότητα των λογικών πράξεων σύμφωνα με την οποία $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$, $(a + b) + c = a + b + c$.

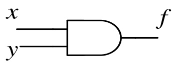
Επίσης το σύμβολο $\cdot$ της λογική πράξης AND μπορεί να παραληφθεί για να απλοποιηθεί η γραφή των λογικών παραστάσεων.

Παράδειγμα 3.4. Με βάση τα πιο πάνω η έκφραση $(\overline{x}_1 \cdot x_2) + (x_3 + (x_4 \cdot x_5) \cdot \overline{x}_6) \cdot x_7$ μπορεί να ξαναγραφεί συνοπτικά σαν $\overline{x}_1 \cdot x_2 + (x_3 + x_4 \cdot x_5 \cdot \overline{x}_6) \cdot x_7$ ή σαν $\overline{x}_1 x_2 + (x_3 + x_4 x_5 \overline{x}_6) x_7$.

3.3.2 Λογικές Παραστάσεις και Λογικές Πύλες

Η υλοποίηση των λογικών παραστάσεων γίνεται με την κατάλληλη σύνδεση λογικών πυλών. *Λογικές πύλες* (*logic gates*) είναι κυκλώματα που υλοποιούν απλές λογικές συναρτήσεις. Στο σχήμα 3.2 δίδονται οι λογικές πύλες που αντιστοιχούν στις βασικές λογικές συναρτήσεις μίας και δύο μεταβλητών. Στο σχήμα 3.3 δίδονται οι λογικές πύλες AND και OR *n* εισόδων.

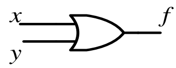
AND



$f = x \cdot y$

x	y	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

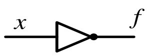
OR



$f = x + y$

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

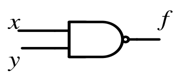
Inverter



$f = \overline{x}$

x	f
0	1
1	0

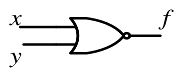
NAND



$f = \overline{x \cdot y}$

x	y	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

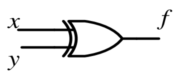
NOR



$f = \overline{x + y}$

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

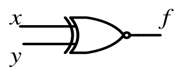
XOR



$f = x \oplus y$

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

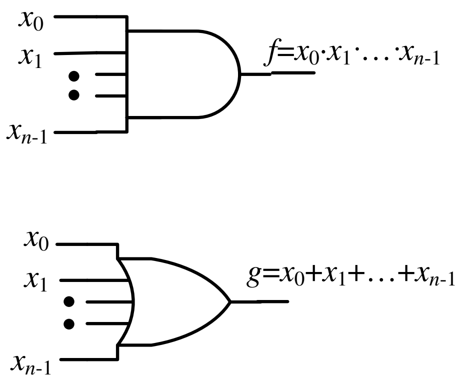
XNOR



$f = \overline{x \oplus y}$

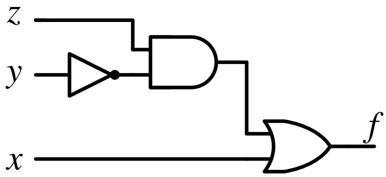
x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Σχήμα 3.2 *Βασικές λογικές πύλες*



Σχήμα 3.3. *Λογικές πύλες AND και OR n εισόδων*

Παράδειγμα 3.5. Η υλοποίηση με λογικές πύλες AND, OR, NOT της λογικής παράστασης $f(x, y, z) = x + \overline{y} \cdot z$ είναι αυτή που δίδεται στη συνέχεια.



3.3.3 Άθροισμα Γινομένων και Άθροισμα Ελαχίστων Όρων

Στη συνέχεια εξετάζεται μια ειδική μορφή λογικών παραστάσεων τα αθροίσματα γινομένων. Ορίζονται επίσης και οι ελάχιστοι όροι ή ελαχιστόροι και αποδεικνύεται ότι κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με μοναδικό τρόπο σαν άθροισμα ελαχιστόρων.

- *Literal* είναι μια λογική μεταβλητή ή το συμπλήρωμά της.
- *Όρος γινομένο* (*product term*) είναι ένα literal ή ένα γινόμενο από literals.
- *Άθροισμα γινομένων* (*sum of products*) είναι μία λογική παράσταση που αποτελείται από έναν όρο γινομένου ή από ένα άθροισμα όρων γινομένων.

Οι πιο πάνω ορισμοί γίνονται πιο σαφείς με τα παραδείγματα που δίδονται στη συνέχεια:

Literals : $x,\ y,\ \overline{z},\ \overline{x}$

Όρος γινόμενο: $x, \overline{z}, x \cdot y \cdot \overline{z}$

Άθροισμα γινομένων: $x \cdot y \cdot \overline{z}$, $\overline{x} + y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot \overline{z}$

Ελάχιστος όρος ή ελαχιστόρος (*minimum term ή minterm*) *n* μεταβλητών είναι ένα λογικό γινόμενο *n* literals στο οποίο εμφανίζεται κάθε μεταβλητή ή το συμπλήρωμά της.

Ένας ελαχιστόρος έχει την τιμή 1 όταν όλα τα literals που τον αποτελούν έχουν την τιμή 1, δηλαδή όταν οι μη συμπληρωματικές μεταβλητές πάρουν την τιμή 1 και οι συμπληρωματικές την τιμή 0. Επομένως για κάθε ελαχιστόρο υπάρχει ένας μόνο συνδυασμός τιμών των μεταβλητών που παίρνει την τιμή 1. Για *n* μεταβλητές υπάρχουν 2^n ελαχιστόροι που συμβολίζονται με $m_0, m_1, \ldots, m_{2^n-1}$. Ο συμβολισμός m_j αντιστοιχεί στον ελαχιστόρο για τον οποίο όταν αντικαταστήσουμε τις μη συμπληρωματικές μεταβλητές με 1 και τις συμπληρωματικές μεταβλητές με 0 προκύπτει το δυαδικό ισοδύναμο του δείκτη *j*. Αν οι γραμμές του πίνακα αληθείας αριθμηθούν από 0 έως 2^n-1 ο ελαχιστόρος m_j γίνεται ένα στη γραμμή με αριθμό *j*. Στον Πίνακα 3.3 δίδονται οι τιμές των ελαχιστόρων για τους συνδυασμούς τιμών 3 μεταβλητών.

Πίνακας 3.3
Τιμές ελαχιστόρων για τρεις μεταβλητές

j	$x\,y\,z$	m_0 $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	m_1 $\bar{x}\bar{y}z$	m_2 $\bar{x}y\bar{z}$	m_3 $\bar{x}yz$	m_4 $x\bar{y}\bar{z}$	m_5 $x\bar{y}z$	m_6 $xy\bar{z}$	m_7 xyz
0	0 0 0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0 0 1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0 1 0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0 1 1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1 0 0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1 0 1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1 1 0	0	0	0	0	0	0	1	0
7	1 1 1	0	0	0	0	0	0	0	1

Άθροισμα ελαχιστόρων (*sum of minterms*) είναι το άθροισμα γινομένων στο οποίο, κάθε γινόμενο είναι ελαχιστόρος και κανένας ελαχιστόρος δεν επαναλαμβάνεται. Για παράδειγμα η έκφραση

$$x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$$

είναι άθροισμα ελαχιστόρων.

Επειδή κάθε ελαχιστόρος παίρνει την τιμή 1 για έναν μόνο συνδυασμό τιμών μεταβλητών, ένα άθροισμα ελαχιστόρων θα παίρνει την τιμή 1 για όλους τους συνδυασμούς τιμών μεταβλητών που αντιστοιχούν σε ελαχιστόρο του αθροίσματος. Κατά συνέπεια το άθροισμα ελαχιστόρων αναπαριστά τη λογική συνάρτηση που έχει την τιμή 1 για τους ίδιους συνδυασμούς τιμών μεταβλητών.

Επομένως κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί σαν άθροισμα ελαχιστόρων. Η παράσταση αυτή εξάγεται από τον πίνακα αληθείας, εάν πάρουμε το άθροισμα των ελαχιστόρων που αντιστοιχούν στις γραμμές του πίνακα αληθείας στις οποίες η συνάρτηση έχει την τιμή 1.

Παράδειγμα 3.6. Έστω η λογική συνάρτηση με τον πιο κάτω πίνακα αληθείας. Να εκφραστεί αυτή σαν άθροισμα ελαχιστόρων.

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, οι ελάχιστόροι που αντιστοιχούν σε τιμή 1 της συνάρτησης είναι οι $\overline{x} \cdot y$, $x \cdot \overline{y}$. Άρα η λογική συνάρτηση εκφράζεται υπό τη μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων σαν

$$f = \overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y}$$

Όταν η συνάρτηση είναι εκφρασμένη σαν άθροισμα ελαχίστων όρων, ένας *συνοπτικός τρόπος παραστάσεώς* της είναι να αντικαταστήσουμε κάθε ελάχιστο όρο m_i με τον αντίστοιχο δεκαδικό δείκτη i. Ο συνοπτικός τρόπος παράστασης επεξηγείται με το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.7. Να εκφραστεί στην συνοπτική του μορφή το άθροισμα ελαχιστόρων

$$f(x_2, x_1, x_0) = \overline{x}_2\overline{x}_1x_0 + \overline{x}_2x_1x_0 + x_2\overline{x}_1\overline{x}_0 + x_2\overline{x}_1x_0 + x_2x_1x_0 .$$

Η μετατροπή στη συνοπτική μορφή γίνεται όπως στη συνέχεια

$$
\begin{array}{lccccc}
f(x_2, x_1, x_0) = & \bar{x}_2\bar{x}_1x_0 + & \bar{x}_2x_1x_0 + & x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 + & x_2\bar{x}_1x_0 + & x_2x_1x_0 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 001 & 011 & 100 & 101 & 111 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & m_1 & m_3 & m_4 & m_5 & m_7
\end{array}
$$

Επομένως

$$f(x_2, x_1, x_0) = m_1 + m_3 + m_4 + m_5 + m_7 = \sum m(1,3,4,5,7)\,.$$

Παράδειγμα 3.8. Να εκφραστεί σαν άθροισμα ελαχιστόρων η λογική συνάρτηση της οποίας ο λογικός πίνακας δίδεται στη συνέχεια

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Οι ελάχιστόροι που αντιστοιχούν σε τιμή 1 της συνάρτησης είναι οι $\bar{x}_2 \cdot x_1 \cdot \bar{x}_0$, $x_2 \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_0$. Άρα η λογική συνάρτηση εκφράζεται υπό τη μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων σαν

$$f = \bar{x}_2 \cdot x_1 \cdot \bar{x}_0 + x_2 \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_0 = m_2 + m_4 = \sum m(2, 4)$$

3.3.4 Γινόμενο Αθροισμάτων και Γινόμενο Μεγίστων Όρων

Μία άλλη ειδική μορφή λογικών παραστάσεων είναι τα γινόμενα αθροισμάτων και τα γινόμενα μεγίστων όρων ή μεγιστόρων τα οποία ορίζονται με τρόπο ανάλογο, όπως τα αθροίσματα γινομένων και τα αθροίσματα ελαχιστόρων. Αυτές οι λογικές παραστάσεις εξετάζονται στη συνέχεια:

- *Όρος άθροισμα* (*sum term*) είναι ένα literal ή ένα λογικό άθροισμα από literals.
- *Γινόμενο αθροισμάτων* (*product of sums*) είναι μία λογική έκφραση που συνίσταται από έναν όρο αθροίσματος ή από γινόμενο όρων αθροισμάτων.

Μέγιστος όρος ή μεγιστόρος (*maximum term ή maxterm*) *n* μεταβλητών είναι λογικό άθροισμα *n* literals στο οποίο εμφανίζεται κάθε μεταβλητή ή το συμπλήρωμά της.

Ένας μεγιστόρος έχει την τιμή 0 όταν όλα τα literals που τον αποτελούν έχουν την τιμή 0, δηλαδή όταν οι μη συμπληρωματικές μεταβλητές παίρνουν την τιμή 0 και οι συμπληρωματικές την τιμή 1. Για *n* μεταβλητές υπάρχουν 2^n μεγιστόροι που συμβολίζονται με $M_0, M_1, \ldots, M_{2^n-1}$. Ο συμβολισμός M_j αντιστοιχεί στον μεγιστόρο για τον οποίο, όταν αντικαταστήσουμε τις μη συμπληρωματικές μεταβλητές με 0 και τις συμπληρωματικές μεταβλητές με 1 προκύπτει το δυαδικό ισοδύναμο του δείκτη *j*. Αν οι γραμμές του πίνακα αληθείας αριθμηθούν από 0 έως 2^n-1 ο μεγιστόρος M_j γίνεται 0 στη γραμμή με αριθμό *j*. Στον πίνακα 3.4 δίδονται οι τιμές των μεγιστόρων για τους συνδυασμούς τιμών 3 μεταβλητών.

Πίνακας 3.4

Τιμές μεγιστόρων για τρεις μεταβλητές

j	*x y z*	M_0 $x+y+z$	M_1 $x+y+\overline{z}$	M_2 $x+\overline{y}+z$	M_3 $x+\overline{y}+\overline{z}$	M_4 $\overline{x}+y+z$	M_5 $\overline{x}+y+\overline{z}$	M_6 $\overline{x}+\overline{y}+z$	M_7 $\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$
0	0 0 0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0 0 1	1	0	1	1	1	1	1	1
2	0 1 0	1	1	0	1	1	1	1	1
3	0 1 1	1	1	1	0	1	1	1	1
4	1 0 0	1	1	1	1	0	1	1	1
5	1 0 1	1	1	1	1	1	0	1	1
6	1 1 0	1	1	1	1	1	1	0	1
7	1 1 1	1	1	1	1	1	1	1	0

Επειδή κάθε μεγιστόρος έχει την τιμή 0 για έναν μόνο συνδυασμό μεταβλητών ένα γινόμενο μεγιστόρων θα έχει την τιμή 0 για όλους τους συνδυασμούς μεταβλητών που αντιστοιχούν σε μεγιστόρο του γινομένου. Κατά συνέπεια το

γινόμενο μεγιστόρων αναπαριστά τη λογική συνάρτηση που έχει την τιμή 0 για τους ίδιους συνδυασμούς τιμών μεταβλητών.
Επομένως κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο μεγιστόρων. Η αντίστοιχη λογική παράσταση εξάγεται από τον πίνακα αληθείας, εάν πάρουμε το γινόμενο των μεγιστόρων που αντιστοιχούν στις γραμμές του πίνακα αληθείας στις οποίες η συνάρτηση έχει την τιμή 0.

Παράδειγμα 3.9. Έστω η λογική συνάρτηση που ορίζεται με τον πιο κάτω πίνακα αληθείας. Να εκφραστεί σαν γινόμενο μεγιστόρων.

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Οι μεγιστόροι που αντιστοιχούν σε τιμή 0 της λογικής συνάρτησης είναι οι $x+y$, $\bar{x}+\bar{y}$. Άρα η λογική συνάρτηση εκφράζεται υπό τη μορφή γινομένου μεγιστόρων σαν

$$f=(x+y)\cdot(\bar{x}+\bar{y})$$

Όταν μία συνάρτηση είναι εκφρασμένη σαν γινόμενο μεγίστων όρων, για να εκφραστεί στην συνοπτική της μορφή αντικαθιστούμε κάθε μέγιστο όρο m_i αυτής με τον αντίστοιχο δεκαδικό δείκτη ***i*.**

Παράδειγμα 3.10. Να εκφραστεί στην συνοπτική της μορφή η λογική συνάρτηση

$$f(x_2,x_1,x_0)=(x_2+x_1+x_0)\cdot(x_2+\bar{x}_1+\bar{x}_0)\cdot(\bar{x}_2+x_1+\bar{x}_0)\cdot(\bar{x}_2+\bar{x}_1+x_0)$$

Σύμφωνα με τα πιο πάνω

$$f(x_2,x_1,x_0)=\underset{\substack{\downarrow\\ 000\\ \downarrow\\ M_0}}{(x_2+x_1+x_0)}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ 011\\ \downarrow\\ M_3}}{(x_2+\bar{x}_1+\bar{x}_0)}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ 101\\ \downarrow\\ M_5}}{(\bar{x}_2+x_1+\bar{x}_0)}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ 110\\ \downarrow\\ M_6}}{(\bar{x}_2+\bar{x}_1+x_0)}$$

Επομένως, η λογική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί συνοπτικά όπως στη συνέχεια.

$$f(x_2, x_1, x_0) = M_0 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_6 = \prod M(0,3,5,6)$$

Παράδειγμα 3.11. Να εκφραστεί σαν γινόμενο μεγιστόρων η λογική συνάρτηση της οποίας ο πίνακας αληθείας δίδεται στη συνέχεια

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Οι μεγιστόροι που αντιστοιχούν σε τιμή 0 της συνάρτησης στον πίνακα αληθείας είναι οι $x_2 + \overline{x}_1 + x_0$, $\overline{x}_2 + x_1 + x_0$. Άρα η λογική συνάρτηση εκφράζεται υπό τη μορφή αθροίσματος μεγιστόρων σαν

$$f = (x_2 + \overline{x}_1 + x_0) \cdot (\overline{x}_2 + x_1 + x_0) = M_2 \cdot M_4 = \prod M(2, 4)$$

Για τους ελαχιστόρους και τους μεγιστόρους ισχύουν τα θεωρήματα τα οποία δίδονται στη συνέχεια.

Θεώρημα 3.14. Κάθε ελάχιστος όρος είναι συμπλήρωμα του αντίστοιχου μέγιστου όρου και αντιστρόφως, δηλαδή $m_i = \overline{M}_i$ και $M_i = \overline{m}_i$.

Θεώρημα 3.15. Το λογικό άθροισμα όλων των ελαχίστων όρων είναι ίσο με 1, δηλαδή $\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$, όπου n είναι ο αριθμός των μεταβλητών.

Θεώρημα 3.16. Το λογικό γινόμενο όλων των μέγιστων όρων ισούται με 0, δηλαδή $\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$, όπου *n* είναι ο αριθμός των μεταβλητών.

3.3.5 Ισοδύναμες λογικές παραστάσεις

Οι λογικές συναρτήσεις μπορεί να αναπαρασταθούν συνήθως με περισσότερες από μία λογικές παραστάσεις. Δύο λογικές παραστάσεις λέγονται *ισοδύναμες* (*equivalent*) εάν αναπαριστούν την ίδια λογική συνάρτηση. Ο συμβολισμός $E_1=E_2$ χρησιμοποιείται για να δείξει ότι οι λογικές παραστάσεις E_1, E_2 είναι ισοδύναμες. Είναι προφανές ότι το σύνολο των λογικών παραστάσεων μπορεί να χωριστεί σε *κλάσεις*, τα μέλη των οποίων αναπαριστούν την ίδια λογική συνάρτηση.

Παράδειγμα 3.12. Να αποδειχθεί ότι οι επόμενες λογικές παραστάσεις είναι ισοδύναμες

$$f = x \cdot y + \overline{x}, \quad g = \overline{x} + y$$

Οι πίνακες αληθείας των λογικών παραστάσεων *f*, *g* είναι αντίστοιχα

x	*y*	*f*
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

x	*y*	*g*
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Παρατηρούμε ότι οι λογικές παραστάσεις *f* και *g* έχουν τον ίδιο πίνακα αληθείας, επομένως αναπαριστούν την ίδια λογική συνάρτηση, άρα είναι ισοδύναμες.

3.3.6 Μετατροπή λογικής παράστασης σε κανονική

Τα αθροίσματα ελαχιστόρων και τα γινόμενα μεγιστόρων είναι οι *κανονικές παραστάσεις* (*canonical forms*) των λογικών συναρτήσεων.
Για να μετατραπεί μία λογική παράσταση στην κανονική μορφή της συνάρτησης στην οποία αντιστοιχεί, δηλαδή σαν άθροισμα ελαχιστόρων ή σαν

γινόμενο μεγιστόρων αρχικά μετατρέπεται σε άθροισμα γινομένων ή σε γινόμενο αθροισμάτων. Ακολούθως εργαζόμαστε όπως στη συνέχεια.

α) Η παράσταση είναι εκφρασμένη σαν άθροισμα γινομένων.

Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο της συνάρτησης με $x_i + \bar{x}_i (=1)$, όπου x_i είναι οι μεταβλητές που λείπουν από τον όρο και στη συνέχεια εκτελούμε τις λογικές πράξεις μέχρι να καταλήξουμε σε άθροισμα ελαχιστόρων.

β) Η συνάρτηση είναι εκφρασμένη σαν γινόμενο αθροισμάτων.

Προσθέτουμε σε κάθε όρο της συνάρτησης τα $x_i \cdot \bar{x}_i$, όπου x_i είναι οι μεταβλητές που λείπουν και στη συνέχεια εκτελούμε τις λογικές πράξεις μέχρι να καταλήξουμε σε γινόμενο μεγιστόρων.

Παράδειγμα 3.13. Να μετατραπεί η λογική παράσταση $f = x_1\bar{x}_0 + x_2$ στην κανονική της μορφή σαν άθροισμα ελαχιστόρων.

$$
\begin{aligned}
f &= x_1\bar{x}_0 + x_2 \\
&= (x_2 + \bar{x}_2)x_1\bar{x}_0 + x_2(x_1 + \bar{x}_1)(x_0 + \bar{x}_0) \\
&= x_2x_1\bar{x}_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2(x_1x_0 + \bar{x}_1x_0 + x_1\bar{x}_0 + \bar{x}_1\bar{x}_0) \\
&= x_2x_1\bar{x}_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2x_1x_0 + x_2\bar{x}_1x_0 + x_2x_1\bar{x}_0 + x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \\
&= x_2x_1\bar{x}_0 + \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + x_2x_1x_0 + x_2\bar{x}_1x_0 + x_2\bar{x}_1\bar{x}_0
\end{aligned}
$$

Η απαλοιφή του ενός από τους ομοίους όρους $x_2x_1\bar{x}_0$ έγινε με βάση την ιδιότητα της Άλγεβρας Boole $a + a = a$.

Η κανονική μορφή της συνάρτησης είναι η εξής:

$$f = \underbrace{x_2x_1\bar{x}_0}_{6} + \underbrace{\bar{x}_2x_1\bar{x}_0}_{2} + \underbrace{x_2x_1x_0}_{7} + \underbrace{x_2\bar{x}_1x_0}_{5} + \underbrace{x_2\bar{x}_1\bar{x}_0}_{4} = \sum m(2,4,5,6,7)$$

Παράδειγμα 3.14. Να μετατραπεί η λογική παράσταση $z = x_2 \cdot (x_1 + \bar{x}_0)$ στην κανονική της μορφή σαν γινόμενο μεγιστόρων.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα

$$
\begin{aligned}
z &= x_2 \cdot (x_1 + \bar{x}_0) \\
&= [[x_2 + x_1\bar{x}_1 + x_0\bar{x}_0][x_2\bar{x}_2 + (x_1 + \bar{x}_0)] \\
&= [(x_2 + x_1)(x_2 + \bar{x}_1) + x_0\bar{x}_0](x_2 + x_1 + \bar{x}_0)(\bar{x}_2 + x_1 + \bar{x}_0) \\
&= [(x_2+x_1)(x_2+\bar{x}_1) + x_0][(x_2 + x_1)(x_2 + \bar{x}_1) + \bar{x}_0](x_2 + x_1 + \bar{x}_0)(\bar{x}_2 + x_1 + \bar{x}_0) \\
&= (x_2+x_1+x_0)(x_2+\bar{x}_1+x_0)(x_2+x_1+\bar{x}_0)(x_2+\bar{x}_1+\bar{x}_0)(x_2+x_1+\bar{x}_0)(\bar{x}_2+x_1+\bar{x}_0) \\
&= (x_2 + x_1 + x_0)(x_2 + \bar{x}_1 + x_0)(x_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_0)(x_2 + x_1 + \bar{x}_0)(\bar{x}_2 + x_1 + \bar{x}_0)
\end{aligned}
$$

Άρα η κανονική μορφή της συνάρτησης είναι η

$$z = \underbrace{(x_2 + x_1 + x_0)}_{0}\underbrace{(x_2 + \overline{x}_1 + x_0)}_{2}\underbrace{(x_2 + \overline{x}_1 + \overline{x}_0)}_{3}\underbrace{(x_2 + x_1 + \overline{x}_0)}_{1}\underbrace{(\overline{x}_2 + x_1 + \overline{x}_0)}_{5} =$$
$$= \prod M(0,1,2,3,5)\,.$$

Θεώρημα 3.17. Δύο λογικές παραστάσεις είναι ισοδύναμες όταν έχουν την ίδια κανονική παράσταση σαν άθροισμα ελαχιστόρων ή σαν γινόμενο μεγιστόρων.

Παράδειγμα 3.15. Να αποδειχθεί ότι οι επόμενες λογικές παραστάσεις είναι ισοδύναμες.

$$f = x_1 \cdot x_0 + \overline{x}_1\,, \quad g = \overline{x}_1 + x_0$$

Η κανονική μορφή της συναρτήσεως f είναι η

$$f = x_1 \cdot x_0 + \overline{x}_1 = x_1 \cdot x_0 + \overline{x}_1 \cdot (\overline{x}_0 + x_0) = x_1 \cdot x_0 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_0 + \overline{x}_1 \cdot x_0 =$$
$$= \sum m(0, 1, 3)\,.$$

Η κανονική μορφή της συναρτήσεως g είναι η

$$g = \overline{x}_1 + x_0 = \overline{x}_1 \cdot (x_0 + \overline{x}_0) + x_0 \cdot (x_1 + \overline{x}_1)$$
$$= \overline{x}_1 \cdot x_0 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_0 + x_1 \cdot x_0 + \overline{x}_1 \cdot x_0 =$$
$$= \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_0 + \overline{x}_1 \cdot x_0 + x_1 \cdot x_0 =$$
$$= \sum m(0, 1, 3)\,.$$

Άρα οι λογικές παραστάσεις *f, g* είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα 3.18. Έστω ότι η λογική συνάρτηση f είναι εκφρασμένη σαν άθροισμα ελαχιστόρων. Η συμπληρωματική της συνάρτηση θα είναι το άθροισμα των ελαχιστόρων που δεν είναι στο άθροισμα της *f*. Αντίστοιχα, εάν μία συνάρτηση είναι εκφρασμένη σαν γινόμενο μεγιστόρων η συμπληρωματική της συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί σαν το γινόμενο των μεγιστόρων που δεν είναι στο γινόμενο της *f*.

Παράδειγμα 3.16. Έστω λογική συνάρτηση $f(x, y, z) = \sum m(0,2,3,7)$ η οποία είναι εκφρασμένη σαν άθροισμα ελαχιστόρων. Η συμπληρωματική της συνάρτηση θα είναι η $\overline{f(x, y, z)} = \sum m(1,4,5,6)$.

Παράδειγμα 3.17. Έστω λογική συνάρτηση $f(x, y, z) = \prod M(0,2,3,7)$ η οποία είναι εκφρασμένη σαν γινόμενο μεγιστόρων. Η συμπληρωματική της συνάρτηση θα είναι η $\overline{f(x, y, z)} = \prod M(1,4,5,6)$.

3.3.7 Θεωρήματα για τις Λογικές Συναρτήσεις

Θεώρημα 3.19. Υπάρχουν 2^{2^n} διαφορετικές λογικές συναρτήσεις, *n* λογικών μεταβλητών.

Παράδειγμα 3.18. Στη συνέχεια δίδονται οι $2^{2^2}=16$ δυνατές λογικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Θεώρημα 3.20. **Γενικευμένο Θεώρημα De Morgan**

Για κάθε λογική παράσταση ισχύει η σχέση

$$\overline{f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0, +, \cdot)} = f(\bar{x}_{n-1}, \bar{x}_{n-2}, \ldots, \bar{x}_0, \ \cdot, +,)$$

Σύμφωνα με το πιο πάνω θεώρημα το συμπλήρωμα μίας λογικής παράστασης, προκύπτει με την αντικατάσταση κάθε μεταβλητής της, με το συμπλήρωμά της και εναλλαγή των τελεστών **+** και **·** .

Παράδειγμα 3.19. Έστω η λογική παράσταση $f = x_0 + x_1 + x_0 \cdot x_1 \cdot x_2$ μια λογική παράσταση. Τότε σύμφωνα με το πιο πάνω θεώρημα η συμπληρωματική της παράσταση θα είναι

$$\bar{f} = \bar{x}_0 \bar{x}_1 (\bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2)$$

Θεώρημα 3.21. Θεώρημα Ανάπτυξης του Shannon

Για κάθε λογική παράσταση ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_i, \ldots, x_0) = \bar{x}_i f(x_{n-1}, \ldots, 0, \ldots, x_0) + x_i f(x_{n-2}, \ldots, 1, \ldots, x_0) \text{ και}$$

$$f\left(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_i, \ldots, x_0\right) = [\bar{x}_i + f(x_{n-1}, \ldots, 1, \ldots, x_0)] + [x_i + f(x_{n-1}, \ldots, 0, \ldots, x_0)]$$

Απόδειξη

Ισχύει

$$f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, 0_i, \ldots, x_0) = 1 f(x_{n-1}, \ldots, 0, \ldots, x_0) + 0 f(x_{n-2}, \ldots, 1, \ldots, x_0)$$

Επίσης

$$f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, 1_i, \ldots, x_0) = 0 f(x_{n-1}, \ldots, 0, \ldots, x_0) + 1 f(x_{n-2}, \ldots, 1, \ldots, x_0)$$

Επομένως
$f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_i, \ldots, x_0) = \bar{x}_i f(x_{n-1}, \ldots, 0, \ldots, x_0) + x_i f(x_{n-2}, \ldots, 1, \ldots, x_0)$

Παράδειγμα 3.20. Να αναπτυχθεί ως προς την μεταβλητή x_0 σύμφωνα με το θεώρημα ανάπτυξης του Shannon η λογική παράσταση

$$f(x_2, x_1, x_0) = x_2\overline{x_1 x_0} + (\bar{x}_2 + x_1)x_0$$

Σύμφωνα με το θεώρημα ανάπτυξης του Shannon

$$f(x_2, x_1, x_0) = f(x_2, x_1, 0)\bar{x}_0 + f(x_2, x_1, 1)x_0 = x_2\bar{x}_0 + (x_2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_1)x_0$$

3.4 Απλοποίηση Λογικών Συναρτήσεων

Όπως προαναφέραμε οι λογικές παραστάσεις υλοποιούνται με την κατάλληλη σύνδεση λογικών πυλών. Οι λογικές συναρτήσεις μπορεί να αναπαρασταθούν με περισσότερες από μία λογικές παραστάσεις. Η υλοποίηση μιας λογικής συνάρτησης με το ελάχιστο κύκλωμα ανάγεται στην εύρεση της ελάχιστης λογικής παράστασης. Η διαδικασία της εύρεσης της ελάχιστης λογικής παράστασης μιας λογικής συνάρτησης ονομάζεται *απλοποίηση*.
Στη συνέχεια παρουσιάζεται μία μέθοδος για το σχεδιασμό ελαχίστων λογικών κυκλωμάτων με δύο επίπεδα λογικών πυλών. Η μέθοδος που θα παρουσιασθεί παράγει ελάχιστα κυκλώματα με τις παραδοχές που δίδονται στη συνέχεια.

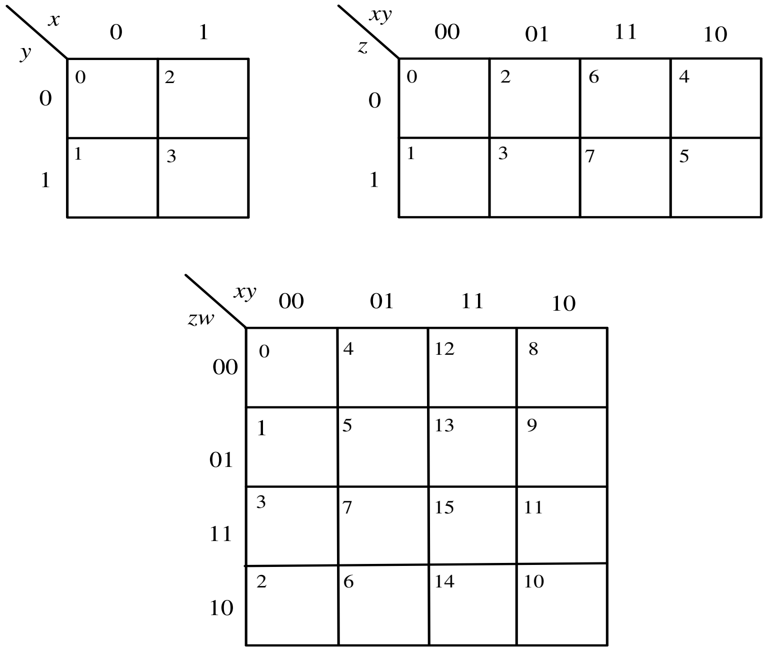
1. Οι είσοδοι του κυκλώματος είναι διαθέσιμες σε κανονική και συμπληρωματική μορφή.
2. Οι πύλες δεν έχουν περιορισμό στον αριθμό των εισόδων.
3. Το κύκλωμα έχει μία έξοδο.
4. Το κριτήριο για την ελαχιστοποίηση του κόστους είναι ο αριθμός των πυλών.

3.4.1 Απλοποίηση Λογικών Συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh

Η εύρεση των απλούστερων λογικών παραστάσεων μιας λογικής συνάρτησης μπορεί να γίνει με αλγεβρικό τρόπο. Για λογικές συναρτήσεις με μικρό αριθμό μεταβλητών χρησιμοποιούνται γραφικοί τρόποι που βασίζονται στους χάρτες Karnaugh και οι οποίοι αναπτύσσονται στη συνέχεια.

Χάρτες Karnaugh

Οι *χάρτες Karnaugh* (*Karnaugh maps*) είναι διδιάστατοι πίνακες αληθείας που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση και την απλοποίηση λογικών συναρτήσεων. Στο σχήμα 3.5 δίδονται χάρτες Karnaugh για 2, 3 και 4 μεταβλητές. Κάθε τετραγωνίδιο ενός χάρτη Karnaugh αντιστοιχεί σε μία γραμμή του πίνακα αληθείας με τον ίδιο αριθμό μεταβλητών. Οι συντεταγμένες κάθε τετραγωνιδίου προσδιορίζουν τη γραμμή του πίνακα αληθείας που αντιστοιχεί στο τετραγωνίδιο. Οι συντεταγμένες γειτονικών τετραγωνιδίων διαφέρουν στην τιμή μίας μόνο μεταβλητής. Για εύκολη αντιστοίχηση μεταξύ των γραμμών των πινάκων αληθείας και των τετραγωνιδίων, σε κάθε τετραγωνίδιο έχει προστεθεί ο αριθμός της αντίστοιχης γραμμής του πίνακα αληθείας.



Σχήμα 3.3. *Χάρτες Karnaugh 2, 3 και 4 μεταβλητών*

Παράδειγμα 3.21. Να απεικονισθεί σε χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση της οποίας ο πίνακας αληθείας δίδεται στην συνέχεια.

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Τοποθετούμε 1 στα τετραγωνίδια τα οποία αντιστοιχούν σε γραμμές στις οποίες η συνάρτηση έχει την τιμή 1 και 0 στα υπόλοιπα.

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	$_0$ 1	$_2$ 0	$_6$ 1	$_4$ 1
1	$_1$ 0	$_3$ 1	$_7$ 0	$_5$ 1

Παράδειγμα 3.22. Να απεικονισθεί σε χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση που δίδεται στην συνέχεια:

$$f = \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z}$$

Ισχύει

$$f = \underbrace{\overline{x} \cdot y \cdot z}_{3} + \underbrace{x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}}_{4} + \underbrace{x \cdot \overline{y} \cdot z}_{5} + \underbrace{x \cdot y \cdot \overline{z}}_{6} = \sum m(3,4,5,6)$$

Τοποθετούμε 1 στα τετραγωνίδια των οποίων ο αριθμός αντιστοιχεί σε ελαχιστόρο της συνάρτησης και 0 στα υπόλοιπα.

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	$^{0}\,0$	$^{2}\,0$	$^{6}\,1$	$^{4}\,1$
1	$^{1}\,0$	$^{3}\,1$	$^{7}\,0$	$^{5}\,1$

Παράδειγμα 3.23. Να απεικονισθεί σε χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση

$$f = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} + x \cdot \overline{y} \cdot z \cdot w + x \cdot y \cdot z \cdot \overline{w} + x \cdot y \cdot z \cdot w$$

Ισχύει,

$$f = \underbrace{\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{w}}_{0} + \underbrace{x \cdot \overline{y} \cdot z \cdot w}_{11} + \underbrace{x \cdot y \cdot z \cdot \overline{w}}_{14} + \underbrace{x \cdot y \cdot z \cdot w}_{15} = \sum m(0,11,14,15)$$

Τοποθετούμε 1 στα τετραγωνίδια των οποίων ο αριθμός αντιστοιχεί σε ελαχιστόρο της συνάρτησης και 0 στα υπόλοιπα.

$zw \backslash xy$	00	01	11	10
00	$^{0}\,1$	$^{4}\,0$	$^{12}\,0$	$^{8}\,0$
01	$^{1}\,0$	$^{5}\,0$	$^{13}\,0$	$^{9}\,0$
11	$^{3}\,0$	$^{7}\,0$	$^{15}\,1$	$^{11}\,1$
10	$^{2}\,0$	$^{6}\,0$	$^{14}\,1$	$^{10}\,0$

Απλοποίηση σε άθροισμα γινομένων

Η απλοποίηση με τους χάρτες Karnaugh προκύπτει με την εφαρμογή των κανόνων που δίδονται στη συνέχεια.

Παρατηρούμε τον χάρτη Karnaugh και προσπαθούμε να σχηματίσουμε ομάδες με όσο το δυνατότερο περισσότερα γειτονικά 1.

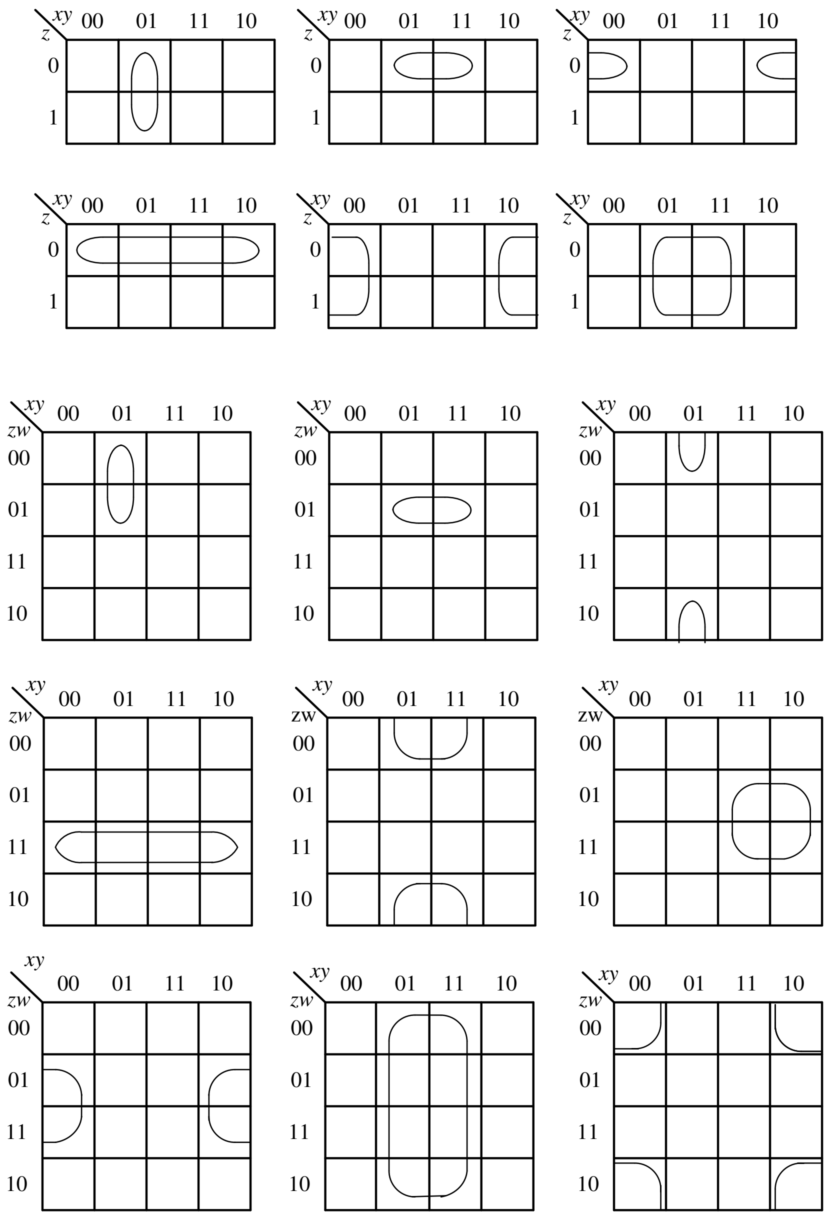
Ο αριθμός των 1 σε κάθε ομάδα πρέπει να είναι δύναμη του 2 (1, 2, 4, …).

Κάθε 1 πρέπει να ανήκει σε μία τουλάχιστον ομάδα.

Κάθε τετραγωνίδιο με "1" πρέπει να μετέχει στον ελάχιστο αριθμό ομάδων.

Ομάδα με 2 γειτονικά 1 σημαίνει απαλοιφή μίας μεταβλητής, αυτής που αλλάζει τιμή, ενώ ομάδα με 4 γειτονικά 1 σημαίνει απαλοιφή δύο μεταβλητών αυτών που αλλάζουν τιμή,… .

Στο σχήμα 3.4 δίδονται ορισμένοι κανόνες σχηματισμού ομάδων σε χάρτες Karnaugh για 3 και 4 μεταβλητές



Σχήμα 3.4. *Κανόνες σχηματισμού ομάδων των 1 ή 0 για 4 μεταβλητές*

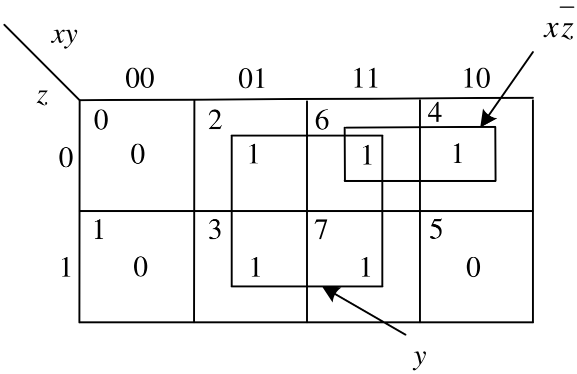
Παράδειγμα 3.24. Να απλοποιηθεί με χάρτες Karnaugh η λογική συνάρτηση.

$$f(x,y,z)=\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}yz+x\bar{y}\bar{z}+xy\bar{z}+xyz$$

Ισχύει

$$f(x,y,z)=\underbrace{\bar{x}y\bar{z}}_{2}+\underbrace{\bar{x}yz}_{3}+\underbrace{x\bar{y}\bar{z}}_{4}+\underbrace{xy\bar{z}}_{6}+\underbrace{xyz}_{7}=\sum m(2,3,4,6,7)$$

Απεικονίζουμε τη λογική συνάρτηση σε χάρτη Karnaugh, δηλαδή τοποθετούμε 1 στα τετραγωνίδια των οποίων ο αριθμός αντιστοιχεί σε ελαχιστόρο της συνάρτησης και 0 στα υπόλοιπα. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τους κανόνες απλοποίησης σχηματίζοντας ομάδες με 1.



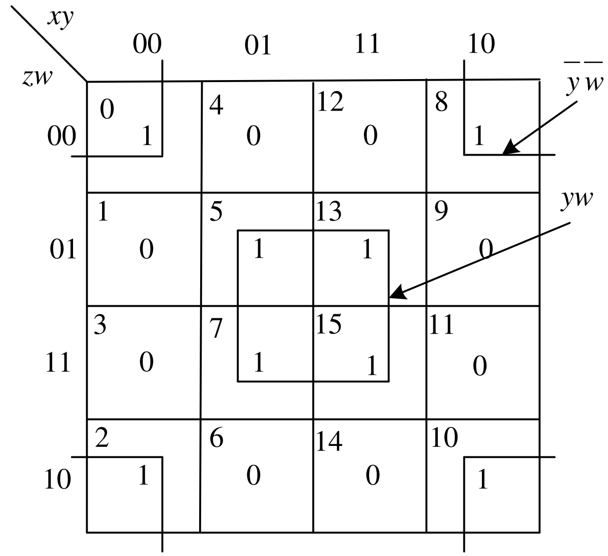
Η απλοποιημένη μορφή της συνάρτησης είναι

$$f=x\bar{z}+y$$

Παράδειγμα 3.25. Να απλοποιηθεί με χάρτες Karnaugh η λογική συνάρτηση

$$f(x,y,z,w)=\sum m(0,2,5,7,8,10,13,15)$$

Απεικονίζουμε τη λογική συνάρτηση σε χάρτη Karnaugh δηλαδή τοποθετούμε 1 στα τετραγωνίδια των οποίων ο αριθμός αντιστοιχεί σε ελαχιστόρο της συνάρτησης και μηδέν στα υπόλοιπα. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τους κανόνες απλοποίησης με ομάδες των 1.



Η απλοποιημένη μορφή της συνάρτησης είναι αυτή που δίδεται στη συνέχεια

$$f = \overline{y}\,\overline{w} + y\,w$$

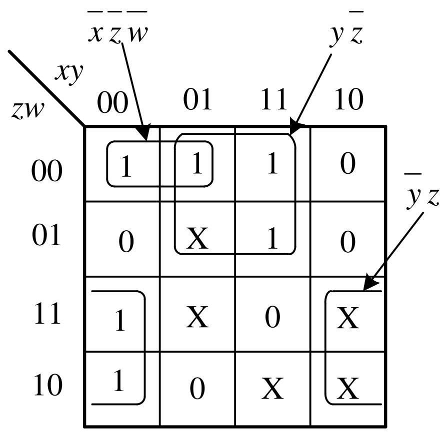
Απλοποίηση με χάρτες Karnaugh μη πλήρως καθορισμένων λογικών συναρτήσεων

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου μία λογική συνάρτηση δεν ορίζεται σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της. Η συνάρτηση αυτή λέγεται μη πλήρως καθορισμένη. Οι ελάχιστοι όροι που αντιστοιχούν στα σημεία που δεν ορίζεται η λογική συνάρτηση ονομάζονται *αδιάφοροι όροι* και θα σημειώνονται με **X** στους πίνακες αληθείας και στους χάρτες Karnaugh. Η απλοποίηση μιας μερικά καθορισμένης συνάρτησης f με τους χάρτες Karnaugh γίνεται με την ίδια μεθοδολογία των πλήρως καθορισμένων συναρτήσεων με μόνη διαφορά ότι οι αδιάφοροι όροι μπορούν να συμμετέχουν στο σχηματισμό ομάδων με γειτονικά 1 εφ' όσον η συμμετοχή τους αυτή οδηγεί σε μεγαλύτερες ομάδες.

Παράδειγμα 3.26. Έστω η λογική συνάρτηση που περιγράφεται στον πίνακα αληθείας που δίδεται στη συνέχεια

x	y	z	w	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	X
0	1	1	0	0
0	1	1	1	X
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	X
1	1	1	1	0

Η μη πλήρως καθορισμένη λογική συνάρτηση απεικονίζεται σε χάρτη Karnaugh όπως στη συνέχεια



Η απλοποιημένη μορφή της δοσμένης λογικής συνάρτησης είναι

$$f = \overline{x}\cdot\overline{z}\cdot\overline{w} + y\cdot\overline{z} + \overline{y}\cdot z$$

Παρατηρούμε ότι οι αδιάφοροι όροι ελήφθησαν κατά την απλοποίηση, άλλοτε ως 0 και άλλοτε ως 1.

Απλοποίηση σε γινόμενο αθροισμάτων

Χρησιμοποιώντας την αρχή της δυϊκότητας, η μέθοδος απλοποίησης που αναπτύξαμε προηγουμένως μπορεί να μετασχηματισθεί δυϊκά για να παράγουμε εκφράσεις ελάχιστων γινομένων σχηματίζοντας ομάδες με 0.

Παράδειγμα 3.27. Να απλοποιηθεί με χάρτες Karnaugh η λογική συνάρτηση

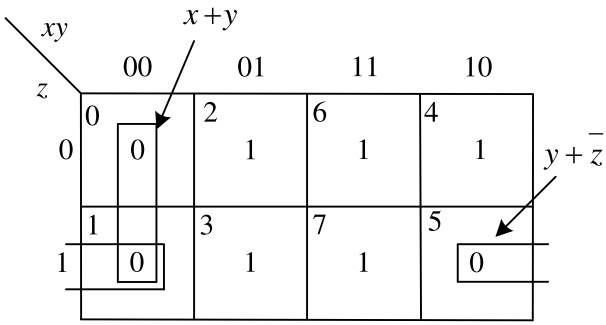
$$f(x,y,z) = \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}z + xy\overline{z} + xyz$$

Η απλοποιημένη μορφή να εξαχθεί υπό μορφή γινομένου αθροισμάτων.

Ισχύει

$$f(x,y,z) = \underbrace{\overline{x}y\overline{z}}_{2} + \underbrace{\overline{x}yz}_{3} + \underbrace{x\overline{y}z}_{5} + \underbrace{xy\overline{z}}_{6} + \underbrace{xyz}_{7} = \sum m(2,3,5,6,7)$$

Απεικονίζουμε τη λογική συνάρτηση σε χάρτη Karnaugh, δηλαδή τοποθετούμε 1 στα τετραγωνίδια των οποίων ο αριθμός αντιστοιχεί σε ελαχιστόρο της συνάρτησης και μηδέν στα υπόλοιπα. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τους κανόνες απλοποίησης με ομάδες των 0.



Η απλοποιημένη μορφή της συνάρτησης θα είναι το γινόμενο των αθροισμάτων που αντιστοιχούν στις ομάδες των 0 του πίνακα αληθείας.

$$f(x,y,z) = (x+y)(y+\overline{z})$$

3.4.2 Γενική μέθοδος απλοποίησης λογικών συναρτήσεων

Βασικοί ορισμοί και θεωρήματα

Ελάχιστο άθροισμα (*minimum sum*) μίας λογικής συνάρτησης είναι κάθε άθροισμα γινομένων που έχει τον ελάχιστο αριθμό γινομένων και τον ελάχιστο αριθμό μεταβλητών.

Μία λογική συνάρτηση *P* *συνεπάγει* (implies) μία λογική συνάρτηση *F* ($P \subset F$), εάν όταν P=1, τότε F=1.

Συνεπαγωγός (*implicant*) μιας λογικής συνάρτησης *F* λέγεται το λογικό γινόμενο το οποίο συνεπάγει την *F*.

Πρώτος συνεπαγωγός (*prime implicant*) μιας λογικής συνάρτησης *F* είναι το λογικό γινόμενο του οποίου, όταν παραλείψουμε μία μεταβλητή δεν συνεπάγει την *F*.

Ουσιώδης πρώτος συνεπαγωγός (*essential prime implicant*) ονομάζεται ο πρώτος συνεπαγωγός που καλύπτει έναν τουλάχιστον ελάχιστο όρο που δεν καλύπτεται από άλλον πρώτο συνεπαγωγό.

Θεώρημα 3.22. Κάθε ελάχιστο άθροισμα λογικής συνάρτησης είναι άθροισμα πρώτων συνεπαγωγών.

Θεώρημα 3.23. Όλοι οι ουσιώδεις πρώτοι συνεπαγωγοί μιας λογικής συνάρτησης περιλαμβάνονται στο ελάχιστο άθροισμα αυτής.

Μεθοδολογία για τη δημιουργία ενός ελαχίστου αθροίσματος γινομένων

1. Προσδιορίζουμε όλους τους πρώτους συνεπαγωγούς. Για μικρό αριθμό μεταβλητών αυτό μπορεί να γίνει με χάρτες Karnaugh.

2. Βρίσκουμε τους ουσιώδεις πρώτους συνεπαγωγούς.
3. Εάν κάποιοι ελαχιστόροι δεν καλύπτονται από ουσιώδεις πρώτους συνεπαγωγούς επιλέγουμε πρώτους συνεπαγωγούς ώστε να έχουμε το ελάχιστο κόστος.

Η επιλογή των μη ουσιωδών πρώτων συνεπαγωγών δεν είναι μοναδική, άρα μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα ελάχιστα αθροίσματα γινομένων.

3.5 Υλοποίηση Λογικών Παραστάσεων με Λογικές Πύλες

Η υλοποίηση μιας δοσμένης λογικής παράστασης πραγματοποιείται με τη διασύνδεση λογικών πυλών. Ένα σύνολο από λογικές πύλες καλείται *πλήρες* (*universal*), εάν μόνο με τις πύλες αυτού του συνόλου μπορεί να υλοποιηθεί οποιαδήποτε λογική παράσταση. Στη συνέχεια δίδονται ορισμένα παραδείγματα συνόλων λογικών πυλών τα οποία είναι πλήρη:

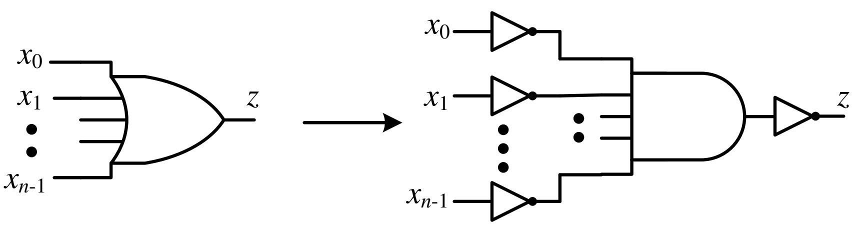
{AND, OR, NOT}, {NAND}, {NOR},{AND, NOT}, {OR, NOT}

Σύνολο πυλών {AND, OR, NOT}

Το σύνολο λογικών πυλών {AND, OR, NOT} είναι πλήρες. Αυτό προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι κάθε συνδυαστικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί με λογικές εκφράσεις και υπάρχει αμφιμονοσήμανη αντιστοιχία μεταξύ λογικών εκφράσεων και κυκλωμάτων AND-OR-NOT.

Σύνολα πυλών {AND, NOT} και {OR, NOT}

Το σύνολο πυλών {AND, NOT}είναι πλήρες. Αυτό μπορεί εύκολα να αποδειχθεί αν υλοποιήσουμε τις πύλες OR με πύλες AND, NOT. Μία πύλη OR n εισόδων υλοποιεί τη λογική συνάρτηση $z = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$ $= \overline{\overline{x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}}}$. Με εφαρμογή του θεωρήματος De Morgan έχουμε $z = \overline{\bar{x}_0 \cdot \bar{x}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_{n-1}}$. Σαν αποτέλεσμα οι πύλες OR στα λογικά κυκλώματα μπορούν να αντικατασταθούν από δομές, όπως αυτή που δίδεται στο σχήμα 3.5. Επομένως το κύκλωμα θα συνίσταται πλέον μόνο από πύλες AND και NOT.

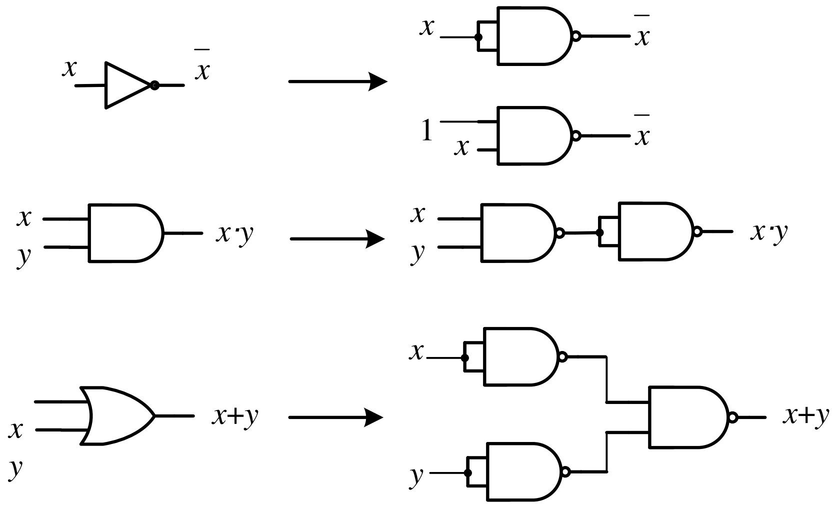


Σχήμα 3.5. *Υλοποίηση πύλης OR n εισόδων με πύλες AND, NOT.*

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι και το σύνολο {OR, NOT} είναι πλήρες.

Σύνολα πυλών {NAND} και {NOR}

Το σύνολο {NAND} είναι πλήρες. Αυτό μπορεί εύκολα να αποδειχθεί αν υλοποιήσουμε τις πύλες με πύλες AND, OR και NOT μόνο με πύλες NAND. Οι υλοποιήσεις αυτές δίδονται στο σχήμα 3.6. Η υλοποίηση του αντιστροφέα με μία πύλη NAND με βραχυκυκλωμένες εισόδους βασίζεται στην σχέση $\overline{x} = \overline{x \cdot x}$, ενώ η υλοποίηση με μία πύλη NAND της οποίας η μία είσοδος είναι μόνιμα συνδεδεμένη στο λογικό 1 στην σχέση $\overline{x} = \overline{x \cdot 1}$. Η υλοποίηση της πύλης AND βασίζεται στην σχέση $xy = \overline{\overline{xy}}$, ενώ η υλοποίηση της πύλης OR στην σχέση $x + y = \overline{\overline{x + y}} = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$.



Σχήμα 3.6. *Υλοποίηση των πυλών NOT, AND και OR με πύλες NAND*

Με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι το σύνολο πύλών NOR} είναι πλήρες.

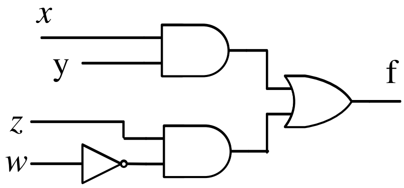
3.5.1 Υλοποίηση με πύλες {AND, OR, NOT}

Αυτός ο τρόπος υλοποίησης ακολουθείται όταν διατίθενται οι πιο πάνω λογικές πύλες σαν αυτοτελή κυκλώματα. Εκφράζουμε τη λογική συνάρτηση σαν άθροισμα γινομένων ή σαν γινόμενο αθροισμάτων. Η σχεδίαση προκύπτει απ’ ευθείας από την λογική παράσταση.

Παράδειγμα 3.28. Να υλοποιηθεί με πύλες AND, OR, NOT η λογική παράσταση

$$f = x \cdot y + z \cdot \overline{w}$$

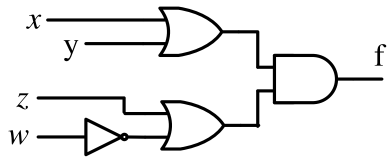
Η υλοποίηση της δοθείσας λογικής παράστασης δίδεται στη συνέχεια



Παράδειγμα 3.29. Να υλοποιηθεί με πύλες AND, OR, NOT η λογική παράσταση

$$f = (x + y) \cdot (z + \overline{w})$$

Η υλοποίηση της λογικής παράστασης δίδεται στη συνέχεια



3.5.2. Υλοποίηση λογικών παραστάσεων με πύλες NAND

Οποιαδήποτε λογική παράσταση μπορεί να κατασκευασθεί μόνο με πύλες NAND. Για να το επιτύχουμε εκφράζουμε τη λογική παράσταση σαν άθροισμα γινομένων και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τη λογική σχέση $a = \overline{\overline{a}}$, εφαρμόζουμε το θεώρημα De Morgan και καταλήγουμε σε ισοδύναμη λογική παράσταση που μπορεί να υλοποιηθεί με πύλες NAND.

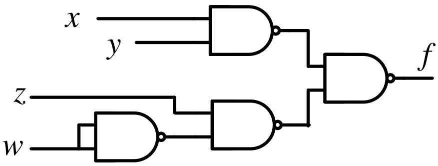
Παράδειγμα 3.30. Να υλοποιηθεί με πύλες NAND η λογική παράσταση

$$f = x \cdot y + z \cdot \overline{w}$$

Σύμφωνα με τη λογική σχέση $a = \overline{\overline{a}}$ και το θεώρημα De Morgan ισχύει

$$f = \overline{\overline{x \cdot y + z \cdot \overline{w}}} = \overline{\overline{x \cdot y} \cdot \overline{z \cdot \overline{w}}}$$

Από την πιο πάνω σχέση προκύπτει εύκολα το επόμενο κύκλωμα



Λόγω της ιδιότητας $\overline{w} = \overline{w \cdot w}$ η αντιστροφή μιας λογικής μεταβλητής έγινε με μία πύλη NAND με βραχυκυκλωμένες εισόδους.

3.5.3. Υλοποίηση με πύλες NOR

Οποιαδήποτε λογική παράσταση μπορεί να κατασκευασθεί μόνο με πύλες NOR. Για να το επιτύχουμε, εκφράζουμε τη λογική παράσταση σαν γινόμενο αθροισμάτων. Στην συνέχεια με βάση την λογική σχέση $a = \overline{\overline{a}}$ και το θεώρημα De Morgan καταλήγουμε σε λογική παράσταση που μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με πύλες NOR.

Παράδειγμα 3.31. Να υλοποιηθεί με πύλες NOR η λογική παράσταση

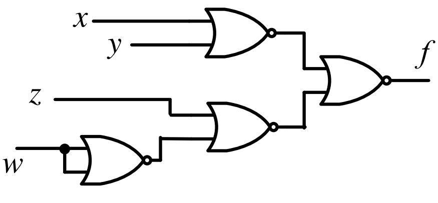
$$f = (x + y) \cdot (z + \overline{w})$$

Σύμφωνα με τη λογική σχέση $a = \overline{\overline{a}}$ και το θεώρημα De Morgan ισχύει

$$f = \overline{\overline{(x + y) \cdot (z + \overline{w})}} = \overline{\overline{(x + y)} + \overline{(z + \overline{w})}}$$

Από την πιο πάνω σχέση προκύπτει εύκολα το λογικό κύκλωμα που δίδεται στη συνέχεια και το οποίο έχει υλοποιηθεί μόνο με πύλες NOR.

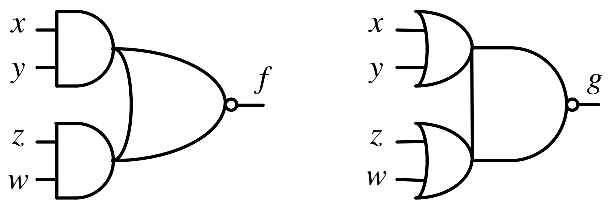
.



Λόγω της ιδιότητας $\overline{w} = \overline{w + w}$ η αντιστροφή μιας λογικής μεταβλητής έγινε με μία πύλη NOR με βραχυκυκλωμένες εισόδους.

3.5.4. Δομές AND-NOR, OR-NAND

Αν και η υλοποίηση συνδυαστικών συστημάτων μπορεί να γίνει μόνο με ένα είδος πύλης, κυκλώματα με βελτιωμένα χαρακτηριστικά μπορούν να προκύψουν από την χρήση μεγαλυτέρων συνόλων πυλών. Στην πράξη προσφέρονται σύνολα που αποτελούνται από πύλες NOT, NAND, NOR, AND, OR. Για κάθε είδος πύλης προσφέρονται τύποι με πολλές εισόδους. Επί πλέον προσφέρονται πιο πολύπλοκες πύλες. Για παράδειγμα στην τεχνολογία CMOS (Complementary Metal Oxide Semiconductor) που θα εξετάσουμε στη συνέχεια τέτοιες πύλες είναι οι XOR, XNOR αλλά και δομές AND-NOR και OR-NAND όπως αυτές του σχήματος 3.7. Οι δομές αυτές υλοποιούνται σε αυτήν την τεχνολογία και είναι χρήσιμες στην αποδοτική σχεδίαση των ψηφιακών συστημάτων.



Σχήμα 3.7. *Δομές AND-NOR, OR-NAND*

3.6. Συναρτήσεις XOR (Exclusive-OR) και XNOR (Exclusive-NOR)

Οι λογικές συναρτήσεις XOR ($x \oplus y$) και XNOR ($\overline{x \oplus y}$) για δύο μεταβλητές περιγράφονται από τον πίνακα αληθείας που δίδεται στη συνέχεια.

x	y	$x \oplus y$	$\overline{x \oplus y}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Από τον πίνακα αληθείας προκύπτουν εύκολα οι επόμενες λογικές παραστάσεις για τις συναρτήσεις XOR και XNOR.

XOR : $x \oplus y = \overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y} = (x + y)(\overline{x} + \overline{y})$

XNOR : $\overline{x \oplus y} = \overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot y = (x + \overline{y}) + (\overline{x} + y)$

Για τις λογικές συναρτήσεις XOR και XNOR ισχύουν οι επόμενες σχέσεις :

$$x \oplus 0 = x \qquad x \oplus 1 = \bar{x}$$

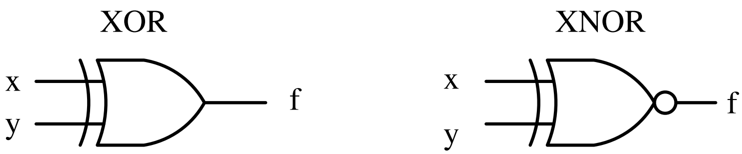
$$x \oplus x = 0 \qquad x \oplus \bar{x} = 1$$

$$x \oplus \bar{y} = \bar{x} \oplus y = \overline{x \oplus y}$$

$$x \oplus y = y \oplus x \qquad \text{(Αντιμεταθετική)}$$

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) \quad \text{(Προσεταιριστική)}$$

Οι πιο πάνω σχέσεις μπορούν να αποδειχθούν με χρήση των πινάκων αληθείας ή με χρήση των αντίστοιχων λογικών παραστάσεων. Οι λογικές πύλες XOR και XNOR που δίδονται στο σχήμα 3.8 υλοποιούν τις αντίστοιχες λογικές συναρτήσεις.



$f = x \oplus y \qquad f = \overline{x \oplus y} = x \otimes y$

***Σχήμα 3.8**. Πύλες XOR, XNOR δύο εισόδων*

Όπως προαναφέραμε η χρήση πυλών XOR και XNOR μπορεί να βελτιώσει τα χαρακτηριστικά πολλών κυκλωμάτων με το να μειώσει το μέγεθός τους και να αυξήσει την ταχύτητά τους. Στη συνέχεια δίδονται παραδείγματα σχεδιάσεων που βασίζονται σε πύλες XOR, XNOR.

Παράδειγμα 3.32. Να σχεδιασθεί μόνο με χρήση πυλών XOR και XNOR δύο εισόδων λογικό κύκλωμα με 3 εισόδους του οποίου η έξοδος να γίνεται 1 όταν ο αριθμός των 1 στις εισόδους του είναι άρτιος αριθμός.

Στη συνέχεια δίδεται ο πίνακας αληθείας της λογική συνάρτησης που πρέπει να υλοποιεί το ζητούμενο κύκλωμα. Το μηδέν θεωρείται άρτιος αριθμός.

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Από τον πιο πάνω πίνακα αληθείας προκύπτει, υπό μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων, η αντίστοιχη λογική συνάρτηση.

$$f = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z}$$

Η πιο πάνω λογική συνάρτηση μπορεί να μετασχηματισθεί όπως στην συνέχεια

$$\begin{aligned} f &= \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} \\ &= \overline{x} \cdot (\overline{y} \cdot \overline{z} + \cdot y \cdot z) + x \cdot (\overline{y} \cdot z + \cdot y \cdot \overline{z}) \\ &= \overline{x} \cdot (\overline{y \oplus z}) + x \cdot (y \oplus z)\ . \end{aligned}$$

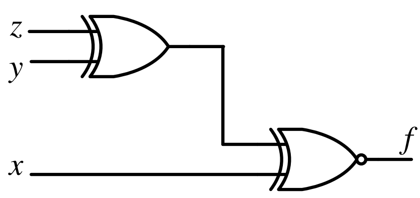
Έστω $M = y \oplus z$, τότε

$$f = \overline{x} \cdot \overline{M} + x \cdot M$$

Τελικά

$$f = \overline{x \oplus (y \oplus z)}$$

Το ζητούμενο κύκλωμα δίδεται στη συνέχεια



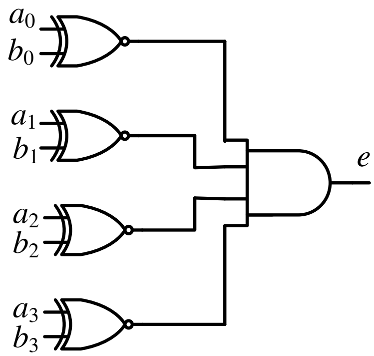
3.6.1 Κυκλώματα βασισμένα στις πύλες XOR, XNOR

Συγκριτές ισότητος μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών

Οι *συγκριτές ισότητος* δύο μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών των n-bit θα δίνει ένδειξη ισότητας όταν οι αριθμοί αυτοί είναι ίσοι ψηφίο προς ψηφίο.

Παράδειγμα 3.33. Να σχεδιασθεί συγκριτής ισότητας τετραψήφιων μη προσημασμένων δυαδικών αριθμών.

Έστω $A = a_3a_2a_1a_0$, $B = b_3b_2b_1b_0$ οι δύο τετραψήφιοι μη προσημασμένοι δυαδικοί αριθμοί. Οι αριθμοί αυτοί θα είναι ίσοι εάν κάθε ψηφίο του ενός είναι ίσο με το αντίστοιχο ψηφίο του άλλου. Η ανίχνευση ισότητας ψηφίο προς ψηφίο επιτυγχάνεται με πύλες XNOR, των οποίων η έξοδος γίνεται 1 εάν και οι δύο είσοδοι είναι ίσες. Επομένως η ισότητα των *A*, *B* διαπιστώνεται με το λογικό AND των εξόδων των πυλών XNOR. Η σχεδίαση του κυκλώματος δίδεται στην συνέχεια. Η έξοδος *e* γίνεται 1 εάν *A*=*B*.



Κυκλώματα μετατροπής από τον δυαδικό κώδικα στον κώδικα Gray

Στο παράγραφο 2.8 έγινε μία σύντομη εισαγωγή στους κώδικες Gray. Ένας άλλος τρόπος παραγωγής των κωδικών λέξεων του κώδικα Gray από τις αντίστοιχες λέξεις του δυαδικού κώδικα περιγράφεται στη συνέχεια.

1. Τα ψηφία g_i λέξεων του κώδικα Gray αριθμούνται από δεξιά προς τα αριστερά από 0 έως $n-1$.
2. Το ψηφίο g_{n-1} ισούται με το ψηφίο b_{n-1} της αντίστοιχης δυαδικής λέξης.
3. Το ψηφίο g_i, όπου $n-2 \le i \le 0$, μιας λέξης του κώδικα Gray είναι 0, εάν τα ψηφία b_i, b_{i+1} της αντίστοιχης δυαδικής λέξης είναι ίδια, διαφορετικά είναι 1.

Έστω $b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1b_0$ η παράσταση ενός αριθμού στο δυαδικό σύστημα. Η μετατροπή του αριθμού αυτού στον κώδικα Gray γίνεται, σύμφωνα με τα πιο πάνω, με τις επόμενες σχέσεις.

$$g_{n-1} = b_{n-1}$$
$$g_{n-2} = b_{n-2} \oplus b_{n-1}$$
$$\dots\ \dots$$
$$g_i = b_i \oplus b_{i+1}$$
$$\dots\ \dots$$
$$g_0 = b_0 \oplus b_1$$

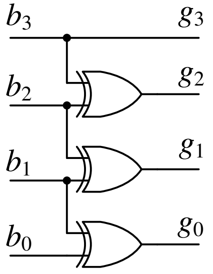
όπου $g_{n-1}g_{n-2}\dots g_1 g_0$ είναι η παράσταση του αριθμού στον κώδικα Gray.

Παράδειγμα 3.34. Να σχεδιασθεί κύκλωμα μετατροπής από τον δυαδικό κώδικα των 4 bit στον αντίστοιχο κώδικα Gray.

Έστω $b_3b_2b_1b_0$ η αναπαράσταση ενός αριθμού στον δυαδικό κώδικα και $g_3g_2g_1g_0$ στον κώδικα Gray. Σύμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις

$$g_3=b_3$$
$$g_2=b_2\oplus b_3$$
$$g_1=b_1\oplus b_2$$
$$g_0= b_0\oplus b_1$$

Η σχεδίαση του κυκλώματος μετατροπής δίδεται στη συνέχεια



Κυκλώματα μετατροπής από τον κώδικα Gray στον δυαδικό κώδικα

Για τον κώδικα Gray ισχύει $b_{n-1} = g_{n-1}$ και $g_i = b_i \oplus b_{i+1}$ για $0 \le i \le n-2$. Ισχύει επίσης η σχέση $g_i \oplus b_{i+1} = (b_i \oplus b_{i+1}) \oplus b_{i+1} = b_i \oplus (b_{i+1} \oplus b_{i+1}) = b_i \oplus 0$ ή $b_i = g_i \oplus b_{i+1}$. Επομένως η μετατροπή μιας λέξης του κώδικα Gray στην αντίστοιχη του δυαδικού κώδικα γίνεται σύμφωνα με τις σχέσεις που δίδονται στη συνέχεια

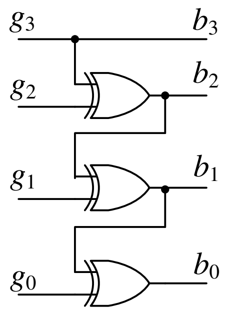
$$
\begin{aligned}
b_{n-1} &= g_{n-1} \\
b_{n-2} &= g_{n-2} \oplus b_{n-1} \\
b_{n-2} &= g_{n-2} \oplus b_{n-1} \\
&\dots\ \dots \\
b_i &= g_i \oplus b_{i+1} \\
&\dots\ \dots \\
b_0 &= g_0 \oplus b_1
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 3.35. Να σχεδιασθεί κύκλωμα μετατροπής από τον κώδικα Gray των 4 bit στον αντίστοιχο δυαδικό κώδικα.

Έστω $b_3b_2b_1b_0$ η αναπαράσταση ενός αριθμού στον δυαδικό κώδικα και $g_3g_2g_1g_0$ στον κώδικα Gray. Σύμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις

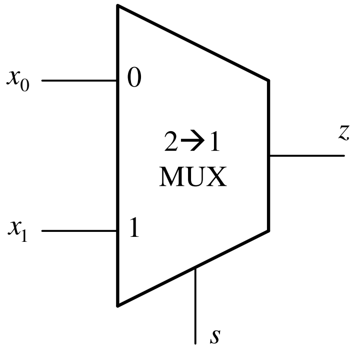
$b_3=g_3$
$b_2=g_2\oplus b_3$
$b_1=g_1\oplus b_2$
$b_0= g_2\oplus b_1$

Η σχεδίαση του κυκλώματος δίδεται στη συνέχεια



3.7. 2→1 Πολυπλέκτης

Ο 2→1 *πολυπλέκτης* (2→1 *multiplexer, ή selector*) είναι ένα λογικό κύκλωμα με 2 εισόδους δεδομένων τις x_1, x_0, μία είσοδο ελέγχου (επιλογής) s και μία έξοδο z. Με την είσοδο επιλογής καθορίζεται με ποια είσοδο δεδομένων θα συνδεθεί η έξοδος. Στο σχήμα 3.9 δίδεται το λογικό σύμβολο και ο πίνακας λειτουργίας του 2→1 πολυπλέκτη.



s	z
0	x_0
1	x_1

Σχήμα 3.9. *Λογικό σύμβολο και πίνακας λειτουργίας του 2→ 1 πολυπλέκτη.*

Στο σχήμα 3.10α δίδονται ο πίνακας αληθείας του 2→1 πολυπλέκτη. Από τον πίνακα αληθείας μπορεί εύκολα να εξαχθεί ο συνοπτικός πίνακας αληθείας που δίδεται στο σχήμα 3.10β. Με X δηλώνεται ότι η μεταβλητή μπορεί να λάβει την τιμή 0 ή 1. Στο σχήμα 3.10γ εξάγεται η απλοποιημένη λογική παράσταση με χρήση χαρτών Karnaugh, ενώ στο σχήμα 3.10δ δίδεται η υλοποίηση του πολυπλέκτη με πύλες AND, OR, NOT. Ο 2→1 πολυπλέκτης υλοποιεί τη λογική συνάρτηση $z = \bar{s} \cdot x_0 + s \cdot x_1$. Η σχεδίαση πολυπλεκτών με περισσότερες εισόδους θα εξετασθεί σε επόμενο κεφάλαιο.

3.7.1. Κυκλώματα με πολυπλέκτες δύο εισόδων

Ισχύει το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 3.24. Ο 2→1 πολυπλέκτης είναι ένα καθολικό στοιχείο σχεδίασης.

Απόδειξη. Η λογική παράσταση που υλοποιεί ο πολυπλέκτης είναι, όπως προαναφέραμε, η $z = \bar{s}x_0 + sx_1$. Για $x_0 = 1$ και $x_1 = 0$ ο πολυπλέκτης υλοποιεί τη λογική συνάρτηση $z = \bar{s}$, δηλαδή μετατρέπεται σε αντιστροφέα (πύλη NOT) με είσοδο την *s*. Για $x_0 = 0$ ο πολυπλέκτης υλοποιεί τη λογική συνάρτηση $z = s \cdot x_1$, δηλαδή μετατρέπεται σε πύλη AND. Εφόσον ο πολυπλέκτης μπορεί να μετατραπεί στις πύλες του συνόλου {AND, NOT} αποτελεί καθολικό στοιχείο σχεδίασης. Στο σχήμα 3.11α δίδεται η μετατροπή του 2→1 πολυπλέκτη σε αντιστροφέα, ενώ στο σχήμα 3.11β η μετατροπή του σε πύλη AND.

s	x_0	x_1	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

(α)

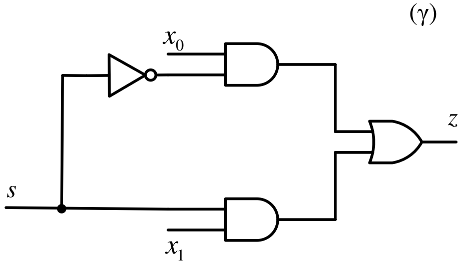
s	x_0	x_1	z
0	0	x	0
0	1	x	1
1	x	0	0
1	x	1	1

(β)

x_1 \ $s\,x_0$	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	1	1	1

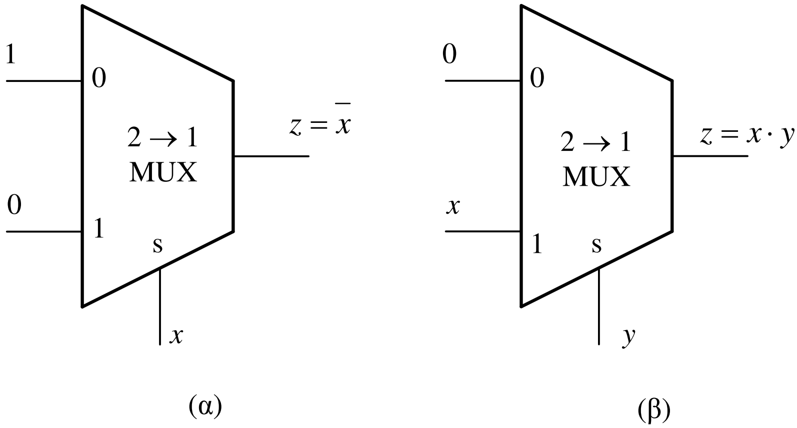
$$z = \bar{s} \cdot x_0 + s \cdot x_1$$

(γ)



(δ)

Σχήμα 3.10 *Σχεδίαση με λογικές πύλες του 2→1 πολυπλέκτη*



Σχήμα 3.11. *Μετατροπή του 2→1 πολυπλέκτη σε αντιστροφέα (α) και πύλη AND (β)*

Επειδή ο 2→1 πολυπλέκτης είναι καθολικό στοιχείο σχεδίασης, κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας 2→1 πολυπλέκτες. Ένας τρόπος σχεδίασης είναι με δέντρα πολυπλεκτών. Η σχεδίαση αυτή προκύπτει με τη διαδοχική εφαρμογή του θεωρήματος του Shannon στην προς υλοποίηση παράσταση. Στη συνέχεια δίδεται ένα παράδειγμα μιας τέτοιας υλοποίησης.

Παράδειγμα 3.36. Να υλοποιηθεί με 2→1 πολυπλέκτες η λογική παράσταση

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = x_3(x_1 + x_2 x_0)$$

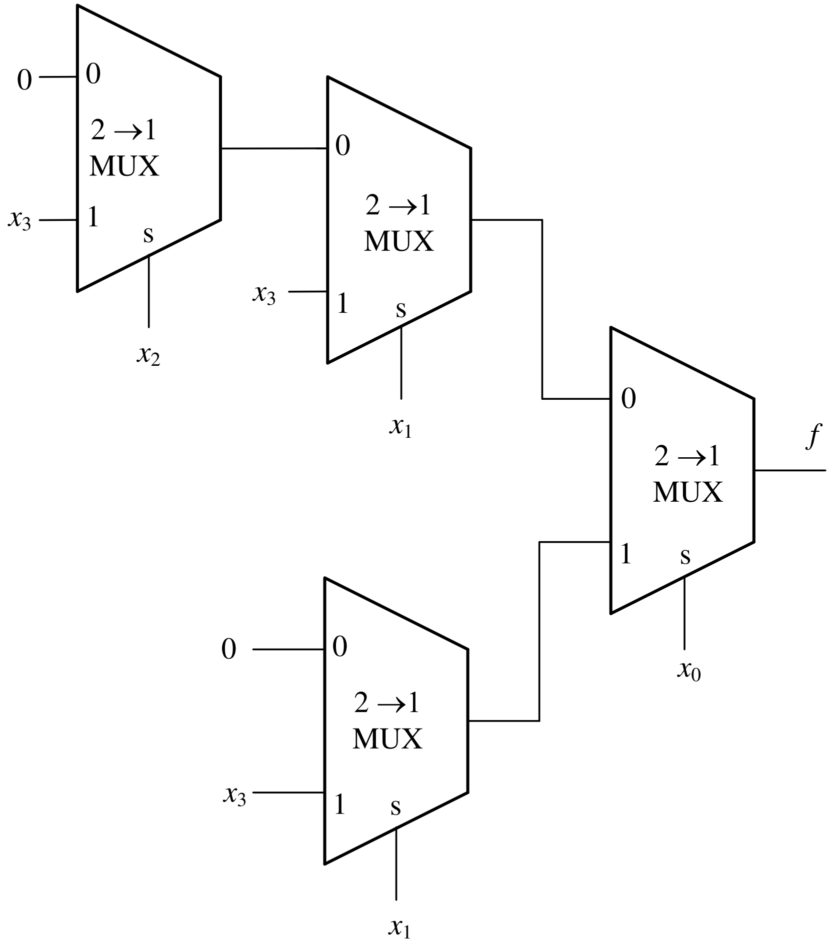
Σύμφωνα με το θεώρημα του Shannon ισχύει για την δοθείσα παράσταση

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = f(x_3, x_2, x_1, 0)\bar{x}_0 + f(x_3, x_2, x_1, 1)x_0$$

Τελικά,

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = (x_3 x_1)\bar{x}_0 + x_3(x_1 + x_2)x_0$$

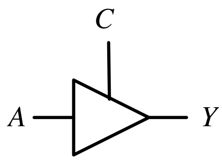
Ο όρος $x_3 x_1$ της πιο πάνω ισότητας μπορεί να υλοποιηθεί με έναν 2→1 πολυπλέκτη που έχει μετατραπεί σε πύλη AND. Για τον όρο $x_3(x_1 + x_2)$ σύμφωνα με το θεώρημα του Shannon έχουμε $x_3(x_1 + x_2) = (x_3 x_2)\bar{x}_1 + x_3 x_1$. Η παράσταση αυτή μπορεί να υλοποιηθεί με 2→1 πολυπλέκτες, όπως δείχνεται στο στο σχήμα 3.12.



Σχήμα 3.12. *Υλοποίηση της λογικής παράστασης* $(x_2 + x_1x_3)x_4$ *με 2→1 πολυπλέκτες*

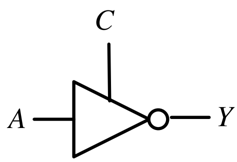
3.8 Απομονωτές τριών καταστάσεων

Οι έξοδοι των απομονωτών τριών καταστάσεων είναι το λογικό 0, το λογικό 1 και η κατάσταση "υψηλής σύνθετης αντίστασης"(high impedance state), συμβολικά Z, στην οποία η έξοδος του απομονωτή συμπεριφέρεται σαν να έχει αποσυνδεθεί από το επόμενο κύκλωμα. Το λογικό σύμβολο και ο πίνακας αληθείας ενός απομονωτή τριών καταστάσεων δίδονται στο σχήμα 3.13. Ο απομονωτής αυτός εισέρχεται στην κατάσταση υψηλής σύνθετης αντίστασης όταν C=0. Το λογικό σύμβολο και πίνακας αληθείας ενός αντιστρέφοντα απομονωτή τριών καταστάσεων δίδεται στο σχήμα 3.14.



C	*A*	*Y*
0	X	Z
1	0	0
1	1	1

Σχήμα 3.13. *Απομονωτής τριών καταστάσεων*



C	*A*	*Y*
0	X	Z
1	0	1
1	1	0

Σχήμα 3.14. *Αντιστρέφων απομονωτής τριών καταστάσεων*

Ασκήσεις

3.1 Να δοθούν οι ελάχιστοι όροι (minterms) και οι μέγιστοι όροι (maxterms) για δύο και τρεις δυαδικές μεταβλητές.

3.2 Το άθροισμα των ελαχίστων όρων είναι ίσο με 1. Αποδείξτε την αλήθεια της πρότασης αυτής για άθροισμα ελαχίστων όρων με 2 και 3 μεταβλητές.

3.3 Να γραφεί στην κανονική της μορφή υπό μορφή αθροίσματος ελαχίστων όρων η λογική συνάρτηση ο πίνακας αληθείας της οποίας δίδεται στην συνέχεια.

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

3.4 Να γραφεί στην κανονική της μορφή υπό μορφή αθροίσματος ελαχίστων όρων η λογική συνάρτηση ο πίνακας αληθείας της οποίας δίδεται στη συνέχεια.

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

3.5 Να γραφεί στην κανονική της μορφή υπό την μορφή γινομένου μεγίστων όρων η λογική συνάρτηση ο πίνακας αληθείας της οποίας δίδεται στην συνέχεια.

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

3.6 Να γραφεί στην κανονική της μορφή υπό την μορφή γινομένου μεγίστων όρων η λογική συνάρτηση ο πίνακας αληθείας της οποίας δίδεται στη συνέχεια

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

3.7 Να μετατραπούν στην κανονική τους μορφή σαν άθροισμα ελαχίστων όρων οι λογικές συναρτήσεις που δίδονται στη συνέχεια

$$f = x \cdot y + y \cdot z\,, \quad g = \overline{x} + y \cdot \overline{z}$$

3.8 Να μετατραπούν στην κανονική τους μορφή σαν γινόμενο μεγίστων όρων οι λογικές συναρτήσεις που δίδονται στη συνέχεια

$$f = (x + y) \cdot (y + z)\,, \quad g = \overline{x} \cdot (y + \overline{z})$$

3.9 Να αποδειχθούν αλγεβρικά οι επόμενες ταυτότητες.

$$\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot y+x\cdot y=\overline{x}+y$$

$$\overline{x}\cdot y+\overline{y}\cdot\overline{z}+x\cdot y+\overline{y}\cdot z=1$$

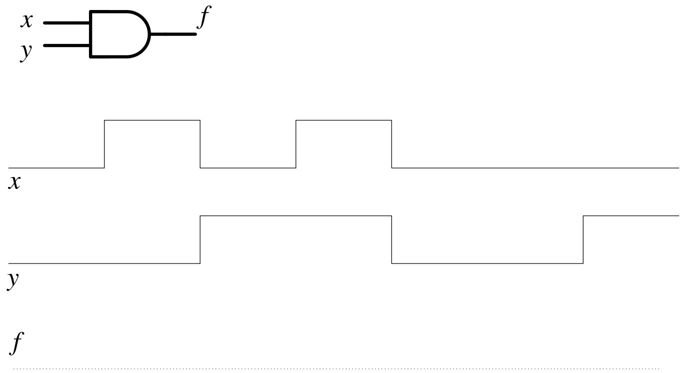
$$y+\overline{x}\cdot z+x\cdot\overline{y}=x+y+z$$

3.10 Να αποδειχθεί ότι οι επόμενες λογικές παραστάσεις είναι ισοδύναμες

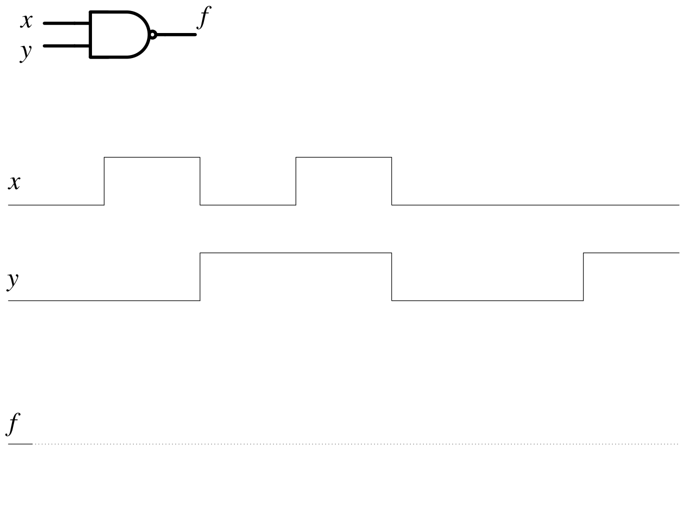
$$f=x\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot y\cdot z+x\cdot y\cdot z$$

$$g=x\cdot\overline{y}+y\cdot z$$

3.11 Να σχεδιασθεί η έξοδος της πύλης AND-2 που δίδεται στη συνέχεια για τις δοσμένες εισόδους.



3.12 Να σχεδιασθεί η έξοδος της πύλης NAND που δίδεται στη συνέχεια για τις δοσμένες εισόδους.



3.13 Να δοθούν ο πίνακας αληθείας και το λογικό σύμβολο

α) Μιας πύλης AND τριών εισόδων.
β) Μιας πύλης OR τριών εισόδων.
γ) Μιας πύλης NAND τριών εισόδων.
δ) Μιας πύλης NOR τριών εισόδων.

3.14 Να μετατραπεί σε αντιστροφέα (inverter) με όλους τους δυνατούς τρόπους

α) Μία πύλη NAND δύο εισόδων.
β) Μία πύλη NOR δύο εισόδων.

3.15 Να σχεδιασθεί με πύλες NAND δύο εισόδων

α) Μία πύλη OR δύο εισόδων (OR-2).
β) Μια πύλη AND δύο εισόδων (AND-2)

3.16 Να σχεδιασθεί με πύλες NOR δύο εισόδων.

α) Μία πύλη OR-2.
β) Μια πύλη AND-2.

3.17 Με δεδομένο ότι κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να κατασκευασθεί με πύλες NOT, AND δύο εισόδων, OR δύο εισόδων να αποδειχθεί ότι κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να κατασκευασθεί:

α) Μόνο με πύλες NAND δύο εισόδων (NAND-2)
β) Μόνο με πύλες NOR δύο εισόδων (NOR-2).

3.18 Να σχεδιασθεί κύκλωμα ισοδύναμο μιας πύλης NAND τριών εισόδων με πύλες NAND δύο εισόδων.

3.19 Να σχεδιασθεί κύκλωμα ισοδύναμο μιας πύλης NOR τριών εισόδων με πύλες NOR δύο εισόδων.

3.20 Να δοθεί ο πίνακας αληθείας που αντιστοιχεί στη λογική παράσταση που δίδεται στη συνέχεια.

$$f = xy + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz$$

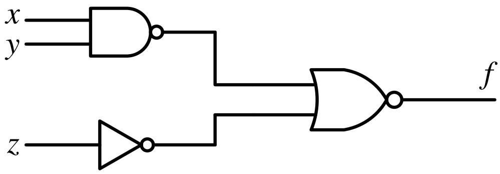
3.21 Να υλοποιηθεί με πύλες AND, OR, NOT η λογική παράσταση που δίδεται στην συνέχεια

$$f = (x + y)(x + z)(\overline{z} + x)$$

3.22 Να υλοποιηθεί με πύλες NOR η λογική παράσταση που δίδεται στη συνέχεια

$$f = (x + y)(y + z)(\overline{z} + x)$$

3.23 Να δοθεί σε απλοποιημένη μορφή η λογική παράσταση που υλοποιεί το κύκλωμα που δίνεται στη συνέχεια καθώς και ο αντίστοιχος πίνακας αληθείας.



3.24 Να απεικονισθεί σε χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση που περιγράφεται στον επόμενο πίνακα αληθείας.

x	***y***	***z***	***f***
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

3.27 Να απεικονισθούν σε χάρτη Karnaugh οι λογικές συναρτήσεις

$$f = xy + \bar{x}\,\bar{y}\,,\ g = x\bar{y} + \bar{x}y$$

3.28 Να απεικονισθούν σε χάρτη Karnaugh οι λογικές συναρτήσεις

$$f = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z \quad g = xyz + x\bar{y}\,z + \bar{x}\,\bar{y}z$$

3.29 Να απεικονισθούν σε χάρτη Karnaugh οι λογικές συναρτήσεις

$$f = xy + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\,,\ g = x\bar{y}\,\bar{z} + z$$

3.30 Από τον χάρτη Karnaugh που δίδεται στη συνέχεια να εξαχθεί η λογική συνάρτηση σε μορφή αθροίσματος ελαχίστων όρων.

z \ xy	00	01	11	10
0	0 0	2 1	6 1	4 0
1	1 1	3 0	7 0	5 1

3.31 Από τον χάρτη Karnaugh που δίδεται στη συνέχεια να εξαχθεί η λογική συνάρτηση σε μορφή αθροίσματος ελαχίστων όρων.

zw \ xy	00	01	11	10
00	0 0	4 0	12 1	8 0
01	1 0	5 1	13 0	9 0
11	3 0	7 0	15 1	11 1
10	2 0	6 1	14 0	10 0

3.32 Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση της οποίας η απεικόνιση σε χάρτη Karnaugh δίδεται στη συνέχεια.

zw \ xy	00	01	11	10
00	0: 1	4: 0	12: 0	8: 1
01	1: 0	5: 1	13: 1	9: 0
11	3: 0	7: 1	15: 1	11: 0
10	2: 1	6: 0	14: 0	10: 1

3.33 Να απλοποιηθούν με τους χάρτες Karnaugh οι λογικές συναρτήσεις που δίδονται στη συνέχεια

$$f = \bar{x}\,\bar{y} + \bar{x}y, \quad g = \bar{x}y + x\bar{y} + xy$$

3.34 Να απλοποιηθούν με τους χάρτες Karnaugh οι λογικές συναρτήσεις που δίδονται στη συνέχεια

$$f = xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}z \qquad g = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + xyz$$

3.25 Να υλοποιηθεί με πύλες AND, OR , NOT η λογική παράσταση που δίδεται στη συνέχεια

$$f = \bar{x}y + y\bar{z} + xz$$

3.35 Να υλοποιηθεί με πύλες NAND η λογική παράσταση που δίδεται στη συνέχεια

$$f = \bar{x}y + y\bar{z} + xz$$

3.36 Να υλοποιηθεί με πύλες AND, OR , NOT η λογική παράσταση που δίδεται στη συνέχεια

$$f = (\bar{x} + y)\cdot(y + \bar{z})\cdot(x + z)$$

3.37 Να υλοποιηθεί με πύλες NOR η λογική παράσταση που δίδεται στη συνέχεια

$$f = (\bar{x} + y)\cdot(y + \bar{z})\cdot(x + z)$$

3.38 Να απλοποιηθεί και στη συνέχεια να υλοποιηθεί με πύλες NAND η λογική συνάρτηση που δίδεται στη συνέχεια

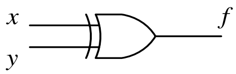
$$f = \sum m(1,2,3,4,5,7)$$

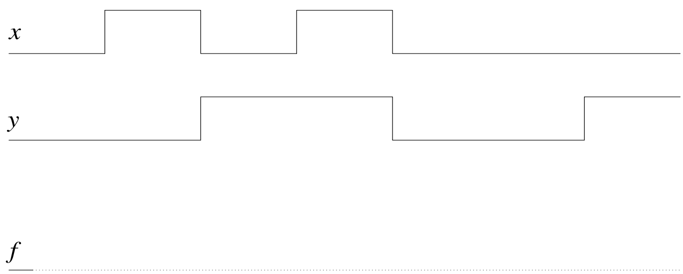
3.39 Να σχεδιασθεί μία πύλη XOR 2 εισόδων χρησιμοποιώντας πύλες AND-2, OR-2, NOT.

3.40 Να σχεδιασθεί μία πύλη XOR 2 εισόδων χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NAND 2 εισόδων.

3.41 Να σχεδιασθεί αναλυτικά μια πύλη XOR-2 (2 εισόδων) χρησιμοποιώντας 4 μόνο πύλες NAND 2 εισόδων.

3.42 Να σχεδιασθεί η έξοδος της πύλης XOR-2 για τις δοσμένες εισόδους.





3.43 Να μετατραπεί σε αντιστροφέα (πύλη NOT)

α) Μία πύλη XOR δύο εισόδων.
β) Μία πύλη XNOR δύο εισόδων.

3.44 Να σχεδιασθεί αναλυτικά κύκλωμα ισοδύναμο μιας πύλης XNOR μόνο με πύλες XOR.

3.45 Να σχεδιασθεί αναλυτικά κύκλωμα ισοδύναμο μιας πύλης XOR μόνο με πύλες XNOR.

3.46 Να μετασχηματισθεί αλγεβρικά η λογική συνάρτηση που δίδεται στη συνέχεια ώστε να μπορεί να υλοποιηθεί με πύλες XOR δύο εισόδων. Ακολούθως να σχεδιασθεί το αντίστοιχο λογικό κύκλωμα.

$$f = \bar{x}\,\bar{y}z + xyz + x\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

3.47 Να μετασχηματισθεί αλγεβρικά η λογική συνάρτηση που δίδεται στη συνέχεια ώστε να μπορεί να υλοποιηθεί μόνο με πύλες AND και XOR. Ακολούθως να σχεδιασθεί το αντίστοιχο κύκλωμα.

$$f = x\overline{y}z\overline{w} + \overline{x}yz\overline{w} + x\overline{y}\,\overline{z}w + \overline{x}y\overline{z}w$$

3.48 Να υλοποιηθεί η λογική συνάρτηση που δίδεται στη συνέχεια μόνο με πύλες XOR δύο εισόδων.

$$f = x \oplus y \oplus \overline{z}$$

3.49 Να αποδειχθεί ότι οι λογικές συναρτήσεις που δίδονται στην συνέχεια είναι ισοδύναμες.

$$f = x \oplus y \oplus \overline{z}\ ,\ \ g = \overline{x \oplus y \oplus z}$$

3.50 Να σχεδιασθεί ένας 2→1 πολυπλέκτης μόνο με πύλες NAND και NOT.

3.51 Να σχεδιασθεί ένας 2→1 πολυπλέκτης μόνο με πύλες NOR και NOT.

3.52 Να μετατραπεί ένας 2→1 πολυπλέκτης σε πύλη XOR-2.

3.53 Να υλοποιηθεί με 2→1 πολυπλέκτες η λογική παράσταση που δίδεται στην συνέχεια

$$f=x+y\cdot z$$