

# Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

Πρόλογος ..... xvii

## Μέρος Α'

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι: Συναρτήσεις - Όρια - Συνέχεια

I.1 Ορισμοί - Έννοιες - Συμβολισμοί .....	1
Η πρωτοβάθμια ή γραμμική συνάρτηση .....	4
Η δευτεροβάθμια συνάρτηση .....	5
Πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n$ .....	7
Ρητή συνάρτηση .....	7
Συναρτήσεις πολλαπλού τύπου .....	7
Μονοτονία συναρτήσεων .....	8
Φραγμένες συναρτήσεις .....	9
Ορισμένα είδη συναρτήσεων .....	9
Αντίστροφη συνάρτηση .....	11
Σύνθετη συνάρτηση .....	12
Πράξεις συναρτήσεων .....	14
Ασκήσεις .....	15
I.2 Όρια συναρτήσεων .....	17
Ασκήσεις .....	25
Πλευρικά όρια .....	27
Ασκήσεις .....	30
Όρια της μορφής: $f(x) \rightarrow \beta$ όταν $x \rightarrow \pm \infty$ .....	31
Όρια της μορφής: $f(x) \rightarrow \pm \infty$ όταν $x \rightarrow \alpha$ .....	34
Όρια της μορφής: $f(x) \rightarrow \pm \infty$ όταν $x \rightarrow \pm \infty$ .....	39
Ασκήσεις .....	42
I.3 Συνέχεια συναρτήσεων .....	43
Εποπτικά στοιχεία .....	43
Θεωρήματα συνέχειας .....	46
Ασκήσεις .....	50
Επαναληπτικές Ασκήσεις στο Κεφάλαιο Ι .....	52

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ II: Η Παράγωγος

II.1 Παράγωγος σε σημείο .....	54
Πλευρικές παράγωγοι .....	58
Παραγωγισιμότητα και συνέχεια .....	60
Ασκήσεις .....	61
II.2 Θεωρήματα - κανόνες παραγωγίσης .....	63
Ασκήσεις .....	70
II.3 Παράγωγος συνάρτησης πεπλεγμένης μορφής .....	72
Ασκήσεις .....	75
II.4 Μονοτονία και ακρότατα .....	76
Ασκήσεις .....	83
II.5 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις, Σημεία καμπής .....	85
Ασκήσεις .....	90
II.6 Βασικά θεωρήματα παραγωγίσης .....	91
Ασκήσεις .....	93
II.7 Κανόνας de L' Hospital .....	94
II.8 Ασύμπτωτες .....	96
Ασκήσεις .....	99
Επαναληπτικές Ασκήσεις στο Κεφάλαιο II .....	100

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ III: Το ολοκλήρωμα

III.1 Διαφορικό συνάρτησης .....	102
Κανόνες διαφορίσης .....	105
Διαφορικός συμβολισμός της παραγώγου .....	105
Ασκήσεις .....	109
III.2 Το αόριστο ολοκλήρωμα .....	110
Κανόνες ολοκλήρωσης .....	111
Ασκήσεις .....	115
III.3 Το ορισμένο ολοκλήρωμα .....	116
Σχέση ορισμένου και αόριστου ολοκληρώματος .....	120
Το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού .....	120
Ασκήσεις .....	124
III.4 Υπολογισμός εμβαδών .....	125
Ασκήσεις .....	131

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV: Παραγωγή και Ολοκλήρωση  
Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων**

IV.1 Προκαταρκτικά .....	134
Οι συναρτήσεις $\beta = \eta\mu\chi$ , $\alpha = \sigma\upsilon\nu\chi$ , $\tau = \epsilon\varphi\chi$ , $\sigma = \sigma\varphi\chi$ .....	134
Ορισμένες ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων .....	136
IV.2 Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $\eta\mu$ , $\sigma\upsilon\nu$ , $\epsilon\varphi$ , $\sigma\varphi$ .....	138
Ασκήσεις .....	142
IV.3 Τα ολοκληρώματα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων .....	144
Ασκήσεις .....	148
IV.4 Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις - Οι παράγωγοι και τα σχετικά ολοκληρώματα .....	150
Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $\tau\omicron\zeta\eta\mu$ , $\tau\omicron\zeta\sigma\upsilon\nu$ , $\tau\omicron\zeta\epsilon\varphi$ , $\tau\omicron\zeta\sigma\varphi$ .....	153
Ολοκληρώματα σχετιζόμενα με τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις .....	157
Ασκήσεις .....	159
Επαναληπτικές Ασκήσεις στο Κεφάλαιο IV .....	160

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: Λογαριθμικές, Εκθετικές και Υπερβολικές  
Συναρτήσεις - Παράγωγοι και Ολοκληρώματα**

V.1 Η συνάρτηση "φυσικός λογάριθμος" .....	162
Ιδιότητες του "φυσικού λογαρίθμου" θετικού αριθμού .....	163
Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x} dx$ .....	165
Λογαριθμική παραγωγή .....	166
Ασκήσεις .....	168
V.2 Η εκθετική συνάρτηση .....	169
Ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης .....	169
Η συνάρτηση $y = a^x$ , $a > 0$ , $x \in \mathbb{R}$ .....	170
Ο αριθμός $e$ .....	171
Η παράγωγος και το ολοκλήρωμα της $y = e^x$ , $x \in \mathbb{R}$ .....	172
Ασκήσεις .....	175
V.3 Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση με βάση το $a$ .....	176
Η παράγωγος της $y = a^x$ .....	176
Το ολοκλήρωμα της $y = a^x$ .....	177
Λογαριθμική παραγωγή για συναρτήσεις της μορφής $y = [f(x)]^{g(x)}$ .....	178
Ασκήσεις .....	181

V.4 Οι υπερβολικές συναρτήσεις .....	182
Ιδιότητες των υπερβολικών συναρτήσεων .....	183
Παράγωγοι των υπερβολικών συναρτήσεων .....	185
Ολοκληρώματα των υπερβολικών συναρτήσεων .....	185
Οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις .....	187
Η συνάρτηση φυσικός λογάριθμος και οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις .....	188
Παράγωγοι των αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων και τα σχετικά ολοκληρώματα .....	190
Ασκήσεις .....	194
Επαναληπτικές Ασκήσεις στο Κεφάλαιο V .....	196

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI: Μέθοδοι ολοκλήρωσης**

VI.1 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες .....	198
VI.2 Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων .....	202
Ασκήσεις .....	204
VI.3 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων με ανάλυση σε άθροισμα απλών κλασμάτων .....	205
Ασκήσεις .....	217
VI.4 Ολοκλήρωση με αντικαταστάσεις .....	218
Ασκήσεις .....	226
VI.5 Ειδικές κατηγορίες ολοκληρωμάτων .....	227
Επαναληπτικές Ασκήσεις στο Κεφάλαιο VI .....	229

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII: Εφαρμογές του Ολοκληρωτικού Λογισμού**

VII.1 Υπολογισμός μήκους τόξου καμπύλης .....	232
Καρτεσιανή εξίσωση και μήκος τόξου καμπύλης .....	233
Παραμετρικές εξισώσεις και μήκος τόξου καμπύλης .....	235
Πολική εξίσωση και μήκος τόξου καμπύλης .....	237
Ασκήσεις .....	240
VII.2 Υπολογισμός όγκου στερεών εκ περιστροφής .....	241
Καρτεσιανή εξίσωση .....	241
Παραμετρικές εξισώσεις .....	245
Ασκήσεις .....	248
VII.3 Επιφάνειες στερεών εκ περιστροφής .....	250
Καρτεσιανή εξίσωση .....	251

Παραμετρικές εξισώσεις .....	251
Πολική εξίσωση .....	252
Ασκήσεις .....	256

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII: Μιγαδικοί αριθμοί**

VIII.1 Ορισμοί - Πράξεις - Γεωμετρική παράσταση .....	258
Γραφική παράσταση των μιγαδικών αριθμών .....	262
Ασκήσεις .....	263
VIII.2 Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικών αριθμών .....	264
Ασκήσεις .....	270
VIII.3 Εκθετική μορφή και λογάριθμος μιγαδικού αριθμού .....	271
Λογάριθμος μιγαδικού αριθμού .....	273
VIII.4 Μιγαδικές συναρτήσεις .....	277
Ασκήσεις .....	279

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX: Ακολουθίες, Σειρές και Δυναμοσειρές**

IX. 1 Ακολουθίες .....	280
Φραγμένες ακολουθίες .....	281
Μονότονες ακολουθίες .....	283
Η έννοια της υπακολουθίας .....	284
Ισότητα ακολουθιών .....	285
Βασικές πράξεις .....	285
Συγκλίνουσες ακολουθίες - Βασικές έννοιες .....	286
Ιδιότητες ορίων ακολουθιών .....	288
Ακολουθίες που συγκλίνουν στο $\pm\infty$ .....	292
Ασκήσεις .....	296
IX.2 Σειρές .....	297
Εισαγωγικά .....	297
Βασικά θεωρήματα σύγκλισης σειρών .....	301
Απόλυτη σύγκλιση σειρών .....	309
Ασκήσεις .....	312
IX.3 Δυναμοσειρές .....	313
Βασικά θεωρήματα σύγκλισης δυναμοσειρών .....	314
Ασκήσεις .....	320
IX.4 Ανάπτυγμα Taylor .....	321

Βασικές έννοιες .....	321
Βασικά θεωρήματα .....	323
Ασκήσεις .....	328

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ X: Γραμμική Άλγεβρα**

X.1 Ορίζουσες .....	330
Θεώρημα του Laplace για το ανάπτυγμα ορίζουσας 3ης τάξης.....	331
Ιδιότητες των οριζουσών .....	333
Παράγωγος ορίζουσας .....	337
Ασκήσεις .....	339
X.2 Πίνακες .....	342
Ισότητα και πράξεις πινάκων .....	345
Γινόμενο πινάκων .....	348
Ορίζουσα πίνακα .....	353
Αντίστροφος πίνακας .....	353
Ασκήσεις .....	359
X.3 Γραμμικά συστήματα .....	361
Επίλυση συστημάτων .....	364
Μέθοδος των διαδοχικών απαλοιφών Gauss .....	364
Μέθοδος με γραμμοπράξεις .....	368
Μέθοδος του βαθμού ενός πίνακα .....	370
Μέθοδος των οριζουσών .....	379
Ασκήσεις .....	382
X.4 Χαρακτηριστικά μεγέθη - Διαγωνοποίηση πινάκων .....	383
Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα .....	383
Εύρεση του αντιστρόφου ενός πίνακα με την βοήθεια του χαρακτηριστικού πολυωνύμου .....	389
Βασικά θεωρήματα .....	391
Διαγωνοποίηση πινάκων .....	392
Εύρεση της $n$ -οστής δύναμης ενός πίνακα .....	397
Ασκήσεις .....	400

## Μέρος Β'

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι: Στοιχεία Διανυσματικού Λογισμού

I.1 Διανύσματα .....	405
1. Βασικές έννοιες επί των διανυσμάτων .....	405
2. Άξονας και αλγεβρική τιμή διανύσματος .....	413
3. Σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο .....	414
4. Πολικό σύστημα συντεταγμένων .....	419
5. Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο χώρο .....	422
6. Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων .....	427
7. Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων .....	428
8. Μικτό γινόμενο διανυσμάτων .....	431
9. Κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες .....	433
Ασκήσεις .....	437
I.2 Επίπεδο και ευθεία στο χώρο .....	439
1. Παράσταση επιπέδου .....	439
2. Απόσταση σημείου από επίπεδο .....	442
3. Σχετική θέση επιπέδων .....	443
4. Διάνυσμα παράλληλο ή κάθετο σε επίπεδο .....	444
5. Ευθεία στο χώρο .....	446
6. Συμβατές και ασύμβατες ευθείες .....	449
7. Σχετική θέση ευθειών στο χώρο .....	449
8. Σχετική θέση ευθείας και επιπέδου στο χώρο .....	450
Ασκήσεις .....	453
I.3 Διανυσματικές Συναρτήσεις .....	455
1. Εισαγωγικές έννοιες .....	455
2. Όριο διανυσματικής συνάρτησης .....	457
3. Συνέχεια διανυσματικής συνάρτησης .....	458
4. Παράγωγος διανυσματικής ανάρτησης .....	459
5. Ολοκλήρωση διανυσματικής συνάρτησης .....	461
Ασκήσεις .....	463
I.4 Διανυσματικοί Χώροι .....	464
0. Εισαγωγικές έννοιες .....	464
1. Εσωτερική και εξωτερική πράξη .....	465
2. Διανυσματικός χώρος .....	465
3. Διανυσματικός υπόχωρος .....	467

4. Γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία .....	468
5. Βάση διανυσματικού χώρου.....	470
6. Διάσταση διανυσματικού χώρου.....	471
7. Γραμμικές απεικονίσεις .....	472
Ασκήσεις .....	474
I.5 Στοιχεία καμπύλων και επιφανειών .....	477
1. Καμπύλες του χώρου .....	477
2. Καμπύλες και επιφάνειες δευτέρου βαθμού .....	480
Ασκήσεις .....	494
I.6 Εφαρμογές του Κεφαλαίου I .....	496
Ασκήσεις .....	505
Επαναληπτικές Ασκήσεις στο Κεφάλαιο I .....	507

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ II: Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών**

II.1 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών .....	511
1. Προκαταρκτικά .....	511
2. Πράξεις συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.....	518
3. Σύνθεση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.....	519
Ασκήσεις .....	521
II.2 Όρια και συνέχεια .....	522
1. Στοιχεία Τοπολογίας του χώρου $\mathbb{R}^2$ .....	522
2. Στοιχεία Τοπολογίας του χώρου $\mathbb{R}^n$ .....	525
3. Όρια συναρτήσεων .....	537
4. Ιδιότητες ορίων .....	546
5. Συνέχεια συναρτήσεων .....	551
6. Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων .....	551
Ασκήσεις .....	555
II.3 Μερικές παράγωγοι .....	557
1. Βασικοί ορισμοί .....	557
2. Παράγωγοι ανώτερης τάξης.....	561
3. Ολικό διαφορικό .....	562
4. Διαφορικά ανώτερης τάξης .....	565
5. Τέλειο διαφορικό .....	565
6. Παραγωγήση σύνθετων συναρτήσεων πολλών μεταβλητών .....	568
7. Το ανάδελτα συνάρτησης πολλών μεταβλητών.....	569
8. Ανάπτυγμα Taylor.....	573



Ασκήσεις.....	576
Π.4 Μέγιστα και ελάχιστα .....	578
1. Βασικές έννοιες .....	578
2. Εύρεση τοπικών ακροτάτων - Συνθήκες.....	579
3. Δεσμευμένα ακρότατα και πολλαπλασιαστές του Lagrange.....	586
4. Σημειακοί μετασχηματισμοί.....	596
5. Παράγωγος κατά διεύθυνση.....	597
6. Πεπλεγμένες συναρτήσεις.....	599
7. Συναρτήσεις της μορφής.....	601
Ασκήσεις .....	606
Επαναληπτικές Ασκήσεις στο Κεφάλαιο Π.....	610

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ: Πολλαπλά Ολοκληρώματα**

ΙΙΙ.1 Διπλά ολοκληρώματα.....	615
1. Διπλά ολοκληρώματα σε ορθογώνιες περιοχές .....	615
2. Διπλά ολοκληρώματα σε φραγμένες περιοχές .....	621
3. Ιδιότητες διπλών ολοκληρωμάτων .....	622
4. Τεχνικές υπολογισμού των διπλών ολοκληρωμάτων .....	624
Ασκήσεις .....	643
ΙΙΙ.2 Τριπλά ολοκληρώματα.....	646
1. Τριπλά ολοκληρώματα σε κυβικές περιοχές .....	646
2. Τριπλά ολοκληρώματα σε φραγμένες περιοχές .....	649
3. Ιδιότητες τριπλών ολοκληρωμάτων .....	650
4. Τεχνικές υπολογισμού των τριπλών ολοκληρωμάτων .....	652
Ασκήσεις .....	665
ΙΙΙ.3 Επικαμπύλια ολοκληρώματα .....	668
1. Προκαταρκτικά .....	668
2. Επικαμπύλια ολοκληρώματα πρώτου είδους .....	668
3. Επικαμπύλια ολοκληρώματα δεύτερου είδους.....	675
4. Επικαμπύλια ολοκληρώματα ανεξάρτητα από το δρόμο της ολοκλήρωσης ....	682
5. Το Θεώρημα του Green.....	686
6. Κέντρο μάζας υλικής καμπύλης .....	693
Ασκήσεις .....	696
ΙΙΙ.4 Επιφανειακά ολοκληρώματα .....	702
1. Επιφάνειες .....	702
2. Επιφανειακά ολοκληρώματα πρώτου είδους .....	718

3. Επιφανειακά ολοκληρώματα δευτέρου είδους .....	723
4. Τα θεωρήματα Stokes και Gauss .....	726
5. Κέντρο μάζας υλικής επιφάνειας .....	732
Ασκήσεις .....	735
Επαναληπτικές Ασκήσεις στο Κεφάλαιο III .....	738

#### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV: Γενικευμένα Ολοκληρώματα και μετασχηματισμοί Laplace**

IV. 1 Γενικευμένα ολοκληρώματα .....	741
1. Γενικευμένα ολοκληρώματα πρώτου είδους .....	741
2. Βασικά θεωρήματα σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων πρώτου είδους.....	745
3. Γενικευμένα ολοκληρώματα δευτέρου είδους.....	754
4. Βασικά θεωρήματα σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων δευτέρου είδους.....	758
5. Γενικευμένα ολοκληρώματα τρίτου είδους.....	764
Ασκήσεις .....	765
IV. 2 Μετασχηματισμός Laplace .....	768
Ασκήσεις.....	779
IV.3 Αντίστροφος του Μετασχηματισμού Laplace .....	780
Ασκήσεις .....	785
Επαναληπτικές Ασκήσεις στο Κεφάλαιο IV .....	786

#### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: Στοιχεία διαφορικών εξισώσεων**

V. 1 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης .....	787
1. Εισαγωγή - Βασικές έννοιες .....	787
2. Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.....	792
2.1 Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών .....	792
2.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις.....	797
2.3 Διαφορικές εξισώσεις της μορφής $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + d_1}{a_2x + b_2y + d_2}\right)$ .....	802
2.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις .....	807
2.5. Διαφορική εξίσωση του Bernoulli.....	809
2.6. Διαφορική εξίσωση του Clairaut.....	813
2.7. Διαφορική εξίσωση του Lagrange .....	817
2.8. Διαφορική εξίσωση του Riccati .....	820
2.9. Διαφορικές εξισώσεις πλήρεις .....	824
Ασκήσεις .....	829

V.2 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές.....	834
Ασκήσεις .....	842
V.3 Εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace στη λύση διαφορικών εξισώσεων .....	843
Ασκήσεις .....	846
Επαναληπτικές Ασκήσεις στο Κεφάλαιο V .....	848

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI: Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων**

VI.1 Ακολουθίες συναρτήσεων.....	851
1. Εισαγωγικά .....	851
2. Συγκλίνουσες ακολουθίες συναρτήσεων - Βασικές έννοιες.....	853
Ασκήσεις .....	860
VI.2 Σειρές συναρτήσεων .....	861
1. Εισαγωγικά .....	861
2. Βασικά θεωρήματα σειρών συναρτήσεων .....	863
Ασκήσεις .....	866
VI.3 Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων με πεδίο ορισμού υποσύνολο $A$ του $\mathbb{R}^n$ .....	867
Ασκήσεις .....	874
VI.4 Σειρές Fourier .....	875
Ασκήσεις .....	888
Επαναληπτικές Ασκήσεις στο Κεφάλαιο VI .....	889

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII: Αριθμητική ολοκλήρωση**

1. Ο κανόνας του ορθογωνίου .....	891
2. Ο κανόνας του τραπεζίου .....	894
3. Ο κανόνας του Simpson .....	898
Ασκήσεις .....	900

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII: Στοιχεία συνδυαστικής ανάλυσης**

1. Μεταθέσεις .....	903
2. Μεταθέσεις με επαναλήψεις .....	904
3. Διατάξεις .....	905
4. Διατάξεις με επαναλήψεις .....	906
5. Συνδυασμοί .....	907
6. Συνδυασμοί με επαναλήψεις .....	908
7. Βασική αρχή απαρίθμησης .....	909
8. Τύπος του διωνύμου .....	910

Ασκήσεις .....	912
Βιβλιογραφία Α' Μέρους .....	915
Βιβλιογραφία Β' Μέρους.....	917