Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Επιχειρησιακή Έρευνα

Η **Βελτιστοποίηση** είναι η διαδικασία απόκτησης του βέλτιστου αποτελέσματος κάτω από δεδομένες καταστάσεις. Στο σχεδιασμό, στην εφαρμογή και στη συντήρηση οποιουδήποτε επιχειρηματικού σχεδίου, οι αποφασίζοντες θα πρέπει να πάρουν πάρα πολλές τεχνολογικές και διοικητικές αποφάσεις σε πάρα πολλά επίπεδα. Ο στόχος όλων αυτών των αποφάσεων είναι είτε η ελαχιστοποίηση του κόστους είτε ή μεγιστοποίηση του κέρδους. Αφού το κόστος και το κέρδος σε οποιοδήποτε πρόβλημα μπορεί να εκφραστούν ως μία συνάρτηση καθορισμένων μεταβλητών απόφασης, η βελτιστοποίηση μπορεί να καθοριστεί ως η διαδικασία εύρεσης των συνθηκών που δίνουν τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης. Όπως είναι φυσικό δεν υπάρχει μια μόνο μέθοδος που να μπορεί να επιλύσει ικανοποιητικά όλα τα προβλήματα βελτιστοποίησης. Για αυτό το λόγο ένας πολύ μεγάλος αριθμός από μεθόδους βελτιστοποίησης έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση διαφορετικών τύπων προβλημάτων. Οι μέθοδοι αναζήτησης του βέλτιστου είναι γνωστές και ως τεχνικές μαθηματικού προγραμματισμού και αποτελούν μέρος της επιχειρησιακής έρευνας. Η επιχειρησιακή έρευνα είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με την εφαρμογή επιστημονικών μεθόδων και τεχνικών σε προβλήματα λήψης αποφάσεων, με στόχο την εύρεση και την εφαρμογή της καλύτερης (βέλτιστης) λύσης.

Κατά τη διάρκεια του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου, η αγγλική στρατιωτική διεύθυνση κάλεσε μια ομάδα από ερευνητές να μελετήσουν στρατηγικά και τακτικά προβλήματα που συσχετιζόταν με την άμυνα της χώρας. Ο αντικειμενικός τους στόχος ήταν να καθοριστεί η πιο αποτελεσματική αξιοποίηση των περιορισμένων στρατιωτικών πόρων. Η διαδικασία αυτή ονομάστηκε *επιχειρησιακή έρευνα (operations research)* γιατί η ομάδα ασχολιόταν με έρευνα σε στρατιωτικές επιχειρήσεις. Από τη γέννηση της χαρακτηρίστηκε από τη χρήση της επιστημονικής γνώσης με στόχο την επίτευξη της καλύτερης αξιοποίησης περιορισμένων πόρων. Τα ενθαρρυντικά αποτελέσματα που επετεύχθηκαν από τις βρετανικές ομάδες επιχειρησιακών ερευνητών, οδήγησαν και τις Ηνωμένες Πολιτείες να δημιουργήσουν αντίστοιχες ομάδες.

Μετά τη λήξη του πολέμου η επιτυχία που είχαν οι στρατιωτικές ομάδες προσέλκυσε και διευθυντές επιχειρήσεων που αναζητούσαν λύσεις στα προβλήματά τους, τα οποία ήταν πιο περίπλοκα λόγω της ιδιαίτερης δομής και λειτουργίας των διαφόρων επιχειρήσεων. Λόγω της δυσκολίας στην επίλυση των προβλημάτων επιχειρησιακής έρευνας, αναζητήθηκαν αποτελεσματικά εργαλεία για την αντιμετώπισής τους. Η πρώτη ευρέως αποδεκτή μαθηματική τεχνική, ονομάστηκε μέθοδος simplex και αναπτύχθηκε το 1947 από τον Αμερικάνο μαθηματικό George Dantzig. Από τότε, νέες τεχνικές επίλυσης αλλά και νέες εφαρμογές έχουν αναπτυχθεί μετατρέποντας την επιχειρησιακή έρευνα σε ένα από τα σημαντικότερα πεδία έρευνας, τόσο σε ακαδημαϊκό όσο και σε επιχειρηματικό επίπεδο. Στις μέρες μας η εντυπωσιακή πρόοδος της επιχειρησιακής έρευνας οφείλεται κατά ένα πολύ μεγάλο μέρος στη ραγδαία ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών και στην ικανότητά τους να επιλύουν προβλήματα πολύ μεγάλων διαστάσεων, σε πολύ μικρό χρόνο.

Το πεδίο της **επιχειρησιακής έρευνας** ασχολείται με την ανάπτυξη και την εφαρμογή ποσοτικών τεχνικών για την επίλυση προβλημάτων που αντιμετωπίζουν αποφασίζοντες σε δημόσιους και ιδιωτικούς οργανισμούς. Τα βήματα που απαιτούνται για τη λήψη μιας απόφασης σε ένα οργανισμό είναι τα ακόλουθα:

1. *Αναγνώριση της ανάγκης.* Η αντίληψη ότι κάποιες δράσεις πρέπει να γίνουν ή να γίνουν καλύτερα.

2. *Καθορισμός του προβλήματος.* Στο βήμα αυτό περιλαμβάνονται τα ακόλουθα σημεία:

    - Ακριβής περιγραφή των στόχων της μελέτης.
    - Καθορισμός των εναλλακτικών αποφάσεων του συστήματος.
    - Αναγνώριση των ορίων, των περιορισμών και των απαιτήσεων του συστήματος.

3. *Κατασκευή του μαθηματικού προτύπου.* Τα μαθηματικά πρότυπα, όπως θα δούμε και αναλυτικά στη συνέχεια, καθορίζουν ρητά τη σχέση των δεδομένων εισόδου (μεταβλητές, περιορισμοί και παράμετροι) με τα δεδομένα εξόδου (τιμή του κριτηρίου βελτιστοποίησης που εκφράζεται με την αντικειμενική συνάρτηση).

4. *Συλλογή δεδομένων.* Συλλογή των δεδομένων του προβλήματος που στην ουσία απεικονίζουν πραγματικές συνθήκες στην επιχείρηση.

5. *Επίλυση του μαθηματικού προτύπου.* Για την επίλυση του μαθηματικού προτύπου έχει αναπτυχθεί ένας πολύ μεγάλος αριθμός από τεχνικές ανάλογα με τη δομή του προβλήματος, για παράδειγμα, το πλήθος και το είδος των περιορισμών (γραμμικοί, ακέραιοι, κ.λπ.) του προβλήματος.

6. *Επεξεργασία της λύσης του μαθηματικού προτύπου.* Αφού επιλυθεί κάποιο πρότυπο είναι αναγκαία η ύπαρξη ανάλυσης ευαισθησίας. Αυτή η ανάλυση θα εστιαστεί στην αξιοπιστία τόσο του προτύπου όσο και της λύσης.

7. *Υλοποίηση των τελικών αποτελεσμάτων.*

Πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι τα βήματα που περιγράφτηκαν δεν πρέπει να θεωρηθούν σαν ένα άκαμπτο σύνολο από βήματα, όπου κάποιος εισέρχεται στο ένα άκρο και εξέρχεται από το άλλο άκρο. Αντίθετα, αναμένεται στην επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος ένας πολύ μεγάλος αριθμός από επαναλήψεις διαφόρων βημάτων και από τροποποιήσεις της στρατηγικής σε διάφορα βήματα.

Γενικεύοντας, μπορούμε να πούμε ότι η επιχειρησιακή έρευνα αναζητά τον καθορισμό της βέλτιστης δράσης σε ένα πρόβλημα απόφασης με βάση τους περιορισμένους πόρους που διαθέτουμε. Ο όρος **επιχειρησιακή έρευνα** σχεδόν πάντα συσχετίζεται με τη χρήση μαθηματικών τεχνικών για την προτυποποίηση και την ανάλυση των προβλημάτων απόφασης. Αν και τα μαθηματικά πρότυπα είναι ο ακρογωνιαίος λίθος της επιχειρησιακής έρευνας, υπάρχει κάτι περισσότερο στην επίλυση ενός προβλήματος από την κατασκευή και την επίλυση ενός μαθηματικού προτύπου. Πιο συγκεκριμένα, τα προβλήματα απόφασης περιλαμβάνουν σημαντικούς δυσδιάκριτους παράγοντες οι οποίοι δεν μπορούν να αποδοθούν άμεσα σε όρους ενός μαθηματικού προτύπου. Ο πιο σημαντικός από αυτούς τους παράγοντες είναι η παρουσία του ανθρώπινου στοιχείου, σε οποιοδήποτε περιβάλλον απόφασης.

1.2 Μαθηματικός Προγραμματισμός

1.2.1 Προτυποποίηση Προβλημάτων

Σε ένα πρόβλημα επιχειρησιακής έρευνας αναπτύσσεται ένα **πρότυπο** που να προσομοιάζει μια φυσική κατάσταση. Δηλαδή, στην ουσία, ένα πρότυπο επιχειρησιακής έρευνας καθορίζει μια εξιδανικευμένη αναπαράσταση ενός πραγματικού συστήματος. Το σύστημα αυτό είτε υπάρχει είτε είναι μια ιδέα που περιμένει να μορφοποιηθεί και να γίνει πραγματικότητα. Στην πρώτη περίπτωση ο αντικειμενικός στόχος είναι η ανάλυση της συμπεριφοράς του συστήματος, με σκοπό να βελτιωθεί η απόδοσή του, ενώ στη δεύτερη περίπτωση είναι να καθοριστεί η βέλτιστη δομή τού υπό ανάπτυξη συστήματος. Η πολυπλοκότητα ενός πραγματικού συστήματος προέρχεται από τον πολύ μεγάλο αριθμό των στοιχείων (μεταβλητών) που ελέγχουν τη συμπεριφορά του συστήματος. Η απλοποίηση του πραγματικού συστήματος με τη χρήση ενός προτύπου εστιάζεται πρωταρχικά στον καθορισμό των κυρίαρχων μεταβλητών και των σχέσεων που τις διέπουν.

Ο πιο σημαντικός τύπος προτύπου επιχειρησιακής έρευνας είναι ο συμβολικός ή μαθηματικός τύπος προτύπου. Στη μορφοποίηση αυτού του τύπου προβλημάτων κάποιος υποθέτει ότι όλες οι συσχετιζόμενες μεταβλητές είναι ποσοτικές. Έτσι, μαθηματικά σύμβολα χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση των μεταβλητών και στη συνέχεια συσχετίζονται με τις κατάλληλες μαθηματικές συναρτήσεις για να περιγράψουν τη συμπεριφορά του συστήματος. Ένα μαθηματικό πρότυπο περιλαμβάνει τρία βασικά σύνολα στοιχείων:

1. **Μεταβλητές απόφασης (decision variables).** Οι μεταβλητές απόφασης είναι οι άγνωστοι που πρέπει να καθοριστούν από την επίλυση του προτύπου. Οι παράμετροι αποτελούν τις μεταβλητές ελέγχου του συστήματος.

2. **Περιορισμοί (constraints).** Για τη μέτρηση των φυσικών περιορισμών του συστήματος, το πρότυπο πρέπει να περιέχει περιορισμούς που να περιορίζουν τις μεταβλητές απόφασης στις εφικτές (επιτρεπτές) τιμές τους. Ένα πρόβλημα κατατάσσεται σε διαφορετικές κατηγορίες βάση

της φύσης των περιορισμών του (γραμμικοί, ακέραιοι, μη γραμμικοί κ.λπ.)

3. **Αντικειμενική συνάρτηση (objective function).** Η αντικειμενική συνάρτηση καθορίζει το μέτρο της αποτελεσματικότητας του συστήματος σαν μαθηματική συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης του. Για παράδειγμα, αν ο αντικειμενικός στόχος του συστήματος είναι η μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους, η αντικειμενική συνάρτηση πρέπει να καθορίζει το κέρδος σε όρους των μεταβλητών απόφασης. Γενικά, η **βέλτιστη (optimal)** λύση ενός μοντέλου επιτυγχάνεται όταν οι αντίστοιχες τιμές των μεταβλητών απόφασης οδηγούν στη **βέλτιστη** τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, ικανοποιώντας ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς.

Τα μαθηματικά πρότυπα στην επιχειρησιακή έρευνα μπορούν να θεωρηθούν ως ο καθορισμός των τιμών των μεταβλητών απόφασης $x_i, i = 1, \cdots, n$, όπου:

$$\text{optimize} \quad x_0 = f(x_1, \cdots, x_n) \tag{1.1}$$

$$\text{υπό}$$

$$g_i(x_1, \cdots, x_n) \leq b_i \qquad i = 1, \cdots, n \tag{1.2}$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, \cdots, n \tag{1.3}$$

Η συνάρτηση f είναι η αντικειμενική συνάρτηση, ενώ το $g_i(x_1, \cdots, x_n) \leq b_i$ αντιπροσωπεύει τον $i-$οστό περιορισμό και το b_i είναι μια γνωστή σταθερά. Οι περιορισμοί $x_i \geq 0$ είναι περιορισμοί μη αρνητικότητας, δηλαδή περιορίζουν τις μεταβλητές σε τιμές 0 ή θετικές. Στα περισσότερα πραγματικά συστήματα, οι περιορισμοί μη αρνητικότητας εμφανίζονται να είναι μια φυσική απαίτηση. Δηλαδή συνολικά έχουμε τη βελτιστοποίηση μιας δεδομένης συνάρτησης βάση ενός συνόλου περιορισμών. Όταν λέμε, όμως, βελτιστοποίηση (optimization) τι εννοούμε; Με τη λέξη **βελτιστοποίηση (optimization)** εννοούμε είτε την **ελαχιστοποίηση (minimization)** είτε τη **μεγιστοποίηση (maximization)** της αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτό σημαίνει ότι δύο αναλυτές που δουλεύουν ανεξάρτητα στο ίδιο πρόβλημα, μπορεί να οδηγηθούν σε δύο διαφορετικά μοντέλα με διαφορετικά αντικειμενικά κριτήρια. Για παράδειγμα, ο ένας αναλυτής μπορεί να προτιμάει να μεγιστοποιήσει το κέρδος ενώ ο άλλος να ελαχιστοποιήσει το κόστος. Τα δύο αυτά κριτήρια δεν είναι ισοδύναμα, με την έννοια ότι για το ίδιο πρόβλημα και με τους ίδιους περιορισμούς μπορεί να οδηγηθούμε σε εντελώς διαφορετικές βέλτιστες λύσεις. Το κύριο συμπέρασμα σε αυτό το σημείο είναι ότι η **βέλτιστη** λύση ενός προτύπου, είναι η βέλτιστη που συσχετίζεται μόνο με αυτό το μοντέλο.

1.2.2 Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού (Linear Programming Problems)

Ένα πρόβλημα του οποίου όλοι οι περιορισμοί είναι γραμμικοί, καθώς και η αντικειμενική συνάρτηση είναι γραμμική, ονομάζεται **πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού**. Μια γενική μορφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι η ακόλουθη:

$$\text{optimize} \quad F(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{1.4}$$

υπό

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_j \qquad j = 1, \cdots, m \tag{1.5}$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, \cdots, n \tag{1.6}$$

όπου c_i, a_{ij}, b_j σταθερές.

Παράδειγμα 1.1

Ένα εργοστάσιο παράγει δύο διαφορετικούς τύπους τηλεοράσεων, A και B. Υπάρχουν δύο γραμμές παραγωγής, μία για κάθε τύπο. Η χωρητικότητα της γραμμής παραγωγής του μοντέλου A είναι 60 κομμάτια την ημέρα, ενώ του μοντέλου B είναι 50. Το μοντέλο A απαιτεί μία ανθρωποώρα εργασίας, ενώ το μοντέλο B απαιτεί δύο ανθρωποώρες. Υπάρχει ένα μέγιστο 120 ανθρωποωρών την ημέρα όπου μπορεί το εργοστάσιο να διαθέσει και για τους δύο τύπους. Αν το κέρδος από την παραγωγή του μοντέλου A είναι 20 ευρώ το κομμάτι και του B είναι 30 ευρώ το κομμάτι, ποια πρέπει να είναι η ημερήσια παραγωγή;

Έστω x_1 είναι οι μονάδες του A που θα πρέπει να παραχθούν την ημέρα και x_2 είναι οι μονάδες του B.

Έχουμε:

$$\max \ 20x_1 + 30x_2 \tag{1.7}$$

υπό

$$x_1 \leq 60 \tag{1.8}$$
$$x_2 \leq 50 \tag{1.9}$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 120 \tag{1.10}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{1.11}$$

Παράδειγμα 1.2

Πρόβλημα επικάλυψης (Set Covering Problem). Έστω το σύνολο $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ και η οικογένεια $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ με n γνήσια υποσύνολα του $\mathcal{U}$, δηλαδή $F_j \subset \mathcal{U}, \forall j$. Κάθε σύνολο F_j συνδέεται με κόστος $c_j, \forall j$. Θέλουμε να βρούμε μία υπο-οικογένεια $(F_j)_{j \in J}$ όπου $\mid J \mid \leq n$, που επικαλύπτει το $\mathcal{U}$, δηλαδή $\bigcup_{j \in J} F_j = \mathcal{U}$ και της οποίας το ολικό κόστος $\sum\limits_{j \in J}$ είναι ελάχιστο.

Για κάθε υποσύνολο F_j, έστω $\alpha_j = [\alpha_{ij}], i = 1, 2, \cdots, m, \forall j$ το χαρακτηριστικό του διάνυσμα δηλαδή:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{εάν το στοιχείο } u_i \in F_j \\ 0, & \text{εάν το } u_i \notin F_j \end{cases} \tag{1.12}$$

Μπορούμε να διαμορφώσουμε μια μήτρα $\mathbf{A}$ της οποίας οι στήλες αντιστοιχούν σε αυτά τα χαρακτηριστικά διανύσματα. Μια τέτοια μήτρα θα έχει βέβαια n στήλες και m γραμμές.

Εισάγουμε τώρα τις μεταβλητές:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{εαν το υποσύνολο } F_j \text{ επιλέγεται τελικά} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{1.13}$$

Έστω ότι είναι $\mathbf{y} = [y_i]$ το διάνυσμα όλων των μεταβλητών. Για να επικαλύψουμε το $\mathcal{U}$ πρέπει η τελική επιλογή των υποσυνόλων να είναι τέτοια ώστε κάθε στοιχείο του $\mathcal{U}$ επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά. Άρα έχουμε τους περιορισμούς:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geq 1, i = 1, 2, \cdots, m. \tag{1.14}$$

Επομένως, το μαθηματικό πρότυπο είναι:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \tag{1.15}$$

υπό

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geq 1 \quad i = 1, \cdots, m \tag{1.16}$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \cdots, m \tag{1.17}$$

ή σε έκφραση μητρών:

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{y} \tag{1.18}$$

υπό

$$\mathbf{A}\mathbf{y} \geq \mathbf{e} \tag{1.19}$$

$$\mathbf{y} \in \{0, 1\} \tag{1.20}$$

Παράδειγμα 1.3

Πρόβλημα ανάμειξης προϊόντων. Ένας χονδρέμπορας πουλάει σκυλοτροφές χονδρικώς, αλλά έχει αποφασίσει να ανοιχτεί στο λιανεμπόριο ανακατεύοντας ένα πλήθος από τροφές για να δημιουργήσει καινούριες ποικιλίες τροφών. Κατάφερε να μορφοποιήσει τρεις διαφορετικές φόρμουλες για καινούριες τροφές: Τροφή τύπου O για τα μεγαλύτερα σκυλιά, τροφή τύπου T για τα μεσαία σκυλιά και τροφή τύπου P για πολύ τα μικρά σκυλιά. Αυτό είναι ένα παράδειγμα του προβλήματος ανάμειξης προϊόντων.

O χονδρέμπορας θα χρησιμοποιήσει τεσσάρων ειδών τροφές A, B, C και D. Η ανάλυση των απαιτήσεων των νέων προϊόντων και των συστατικών των τροφών έχει οδηγήσει στις παρακάτω απαιτήσεις για τις τροφές:

- Η τροφή τύπου O πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 25% από την τροφή τύπου B και όχι περισσότερο από 20% από την τροφή τύπου C.
- Η τροφή τύπου T πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 50% από την τροφή τύπου A και όχι περισσότερο από 25% από την τροφή τύπου D.
- Η τροφή τύπου P πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 25% από την τροφή τύπου A και 25% από την τροφή τύπου B και 0% από την τροφή τύπου C.

Περιορισμένες ποσότητες από τις αρχικές τροφές είναι διαθέσιμες. Για κάθε βδομάδα υπάρχουν 1000kg από την τροφή τύπου A, 1000kg από την τροφή τύπου B, 750kg από την τροφή τύπου C και 800kg από την τροφή τύπου D. O χονδρέμπορας πληρώνει €$0.5/kg$ για την τροφή τύπου A, €$0.6/kg$ για την τροφή τύπου B, €$0.4/kg$ για την τροφή τύπου C και €$0.45/kg$ για την τροφή τύπου D. Σχεδιάζει να πουλήσει €$0.9/kg$ την τροφή τύπου O, €$0.85/kg$ την τροφή τύπου T και €$0.9/kg$ την τροφή τύπου P. O χονδρέμπορας θέλει να ξέρει τις βέλτιστες ποσότητες που θα ανακατέψει τις αρχικές τροφές για να παράξει τα τρία νέα προϊόντα, με σκοπό να μεγιστοποιήσει το κέρδος του.

Έστω ότι $i = A, B, C, D$ και $j = O, T, P$, τότε οι μεταβλητές απόφασης καθορίζονται ως ακολούθως:

$$x(i, j) = \text{κιλά από τις τροφές } i \text{ που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή των καινούριων προιόντων } j.$$

Το κέρδος από την πώληση του προϊόντος Ο είναι €$0.9/kg$ και η αγορά του προϊόντος Α κοστίζει €$0.5/kg$ άρα το συνολικό κέρδος είναι €$(0.9 - 0.5)/kg$ και άρα στην αντικειμενική συνάρτηση η μεταβλητή $x(A, O)$ θα πολλαπλασιαστεί με 0.4. Ομοίως προκύπτουν όλες οι τιμές με τις οποίες θα πολλαπλασιαστούν στην αντικειμενική συνάρτηση οι μεταβλητές $x(i, j)$.

Έτσι έχουμε το ακόλουθο πρόβλημα:

$$\begin{aligned}
\max \quad & 0.40x(A,O) + 0.30x(B,O) + 0.50x(C,O) + 0.45x(D,O) + \\
& 0.35x(A,T) + 0.25x(B,T) + 0.45x(C,T) + 0.40x(D,T) + \\
& 0.40x(A,P) + 0.30x(B,P) + 0.35x(D,P) \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

υπό

$$\begin{aligned}
x(A,O) - 3x(B,O) + x(C,O) + x(D,O) &\leq 0 && (1.22)\\
-x(A,O) - x(B,O) + 4x(C,O) - x(D,O) &\leq 0 && (1.23)\\
-x(A,T) + x(B,T) + x(C,T) + x(D,T) &\leq 0 && (1.24)\\
-x(A,T) - x(B,T) - x(C,T) + 3x(D,T) &\leq 0 && (1.25)\\
-3x(A,P) + x(B,P) + x(D,P) &\leq 0 && (1.26)\\
x(A,P) - 3x(B,P) + x(D,P) &\leq 0 && (1.27)\\
x(A,O) + x(A,T) + x(A,P) &\leq 1000 && (1.28)\\
x(B,O) + x(B,T) + x(B,P) &\leq 1000 && (1.29)\\
x(C,O) + x(C,T) &\leq 750 && (1.30)\\
x(D,O) + x(D,T) + x(D,P) &\leq 800 && (1.31)\\
x(A,O), x(A,T), x(A,P), x(B,O), x(B,T), x(B,P), &\\
x(C,O), x(C,T), x(D,O), x(D,T), x(D,P) &\geq 0 && (1.32)
\end{aligned}$$

Εδώ, ο πρώτος περιορισμός εγγυάται την ύπαρξη τουλάχιστον 25% της τροφής τύπου Α στην τροφή τύπου Ο, ο δεύτερος περιορισμός εγγυάται την ύπαρξη τουλάχιστον 20% της τροφής τύπου C στην τροφή τύπου Ο κ.ο.κ.

Το σημαντικότερο σημείο, όπως είπαμε, για τη σωστή επίλυση ενός προβλήματος, είναι να προτυποποιηθούν κατάλληλα όλοι οι παράγοντες του προβλήματος. Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε έναν τρόπο (μια μέθοδο ή ένα πρόγραμμα) που να επιλύει το πρότυπο. Υπάρχουν αρκετά πακέτα λογισμικού που επιλύουν προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού και γενικότερα συνδυαστικής βελτιστοποίησης (όπως ο Solver του Excel). Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε το πρόγραμμα LINGO το οποίο παρέχει μια γλώσσα προτυποποίησης που επιτρέπει την περιγραφή προτύπων με πολύ γενικό τρόπο. Η προτυποποίηση με το LINGO βοηθάει στην περιγραφή του προβλήματος με φυσικό τρόπο, που μοιάζει με τον βασικό μαθηματικό συμβολισμό. Στα περισσότερα προγράμματα οι περιορισμοί πρέπει να μπαίνουν ο ένας μετά τον άλλον, πράγμα που δυσχεραίνει πάρα πολύ το γράψιμο του προτύπου στον υπολογιστή. Αντίθετα στο LINGO οι περιορισμοί ομαδοποιούνται ανάλογα με τη μαθηματική προτυποποίηση του προβλήματος. Έτσι, τα πρότυπα μπορούν εύκολα να προσαρμοστούν σε περίπλοκες κατάστασεις απλά με μερικές αλλαγές.

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό του LINGO είναι ο τρόπος εισόδου των δεδομένων. Τα δεδομένα, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, μπαίνουν σε ένα ξεχωριστό κομμάτι, πράγμα που επιτρέπει την απομόνωση των δεδομένων από την υπόλοιπη μορφοποίηση του προβλήματος. Έτσι, με αυτόν τον τρόπο, παρέχεται η δυνατότητα τα δεδομένα του προβλήματος να βρίσκονται σε ένα φύλλο εργασίας στο Excel ή σε μια βάση δεδομένων ή ακόμα και σε ένα αρχείο κειμένου.

Καθορίζουμε, τώρα, δύο σύνολα $BULKFOOD = \{A, B, C, D\}$ και NEW $MIX = \{O, T, P\}$. Οι περιορισμένες ποσότητες των τροφών μπορούν να αναπαρασταθούν από το διάνυσμα $LIMITS$, όπου $LIMITS(A) = 1000$, $LIMITS(B) = 1000$, $LIMITS(C) = 750$, $LIMITS(D) = 800$. Έστω I ο δείκτης του $BULKFOOD$ και J ο δείκτης του $NEWMIX$. Μπορούμε τώρα να εκφράσουμε τις μεταβλητές ως:

$MIX(I, J) =$κιλά της αρχικής τροφής I για να χρησιμοποιηθούν για τα J.

Στο LINGO γράφουμε τα ακόλουθα

```
@FOR(BULKFOOD(I):
         @SUM(NEWMIX(J):MIX(I,J)) < LIMITS(I));
```

Η αντιστοιχία με τη μαθηματική προτυποποίηση είναι η ακόλουθη: για όλα τα i στο BULKFOOD το $\sum_j MIX_{ij}$ είναι μικρότερο από τον περιορισμό $LIMITS(i)$.

Όμοια, έστω $PROFIT(I, J)$ το κέρδος που καθορίζει τον πίνακα των συντελεστών των σταθερών, δηλαδή εδώ:

```
                      J
                S       T        P
          A   0.4     0.35     0.4
I         B   0.3     0.25     0.3
          C   0.5     0.45     0.0
          D   0.45    0.4      0.35
```

Η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζεται ως ακολούθως:

```
PAIRS(BULKFOOD,NEWMIX) : PROFIT, MIX
    MAX = @SUM(PAIRS:PROFIT*MIX)
```

Η αντιστοιχία με τη μαθηματική προτυποποίηση είναι η ακόλουθη: ελαχιστοποίησε το:

$$\sum_i \sum_j PROFIT_{ij} MIX_{ij}. \tag{1.33}$$

Η εισαγωγή της εντολής PAIRS επιτρέπει την έκφραση ενός διπλού αθροίσματος με ευθύ και εύκολο τρόπο.

Για να ξεκινήσουμε ένα πρότυπο πρέπει να γράψουμε την εντολή MODEL, ενώ για να το ολοκληρώσουμε πρέπει να γράψουμε την εντολή END. Ένα πρόγραμμα στο LINGO συνήθως αποτελείται από τρία ξεχωριστά σύνολα. Στο πρώτο σύνολο, το οποίο ξεκινάει με την εντολή SETS και τελειώνει με την εντολή ENDSETS, γίνεται η δήλωση των μεταβλητών απόφασης και των παραμέτρων του προβλήματος και καθορίζεται το μέγεθος και οι διαστάσεις τους. Στο δεύτερο μέρος του προγράμματος γίνεται εισαγωγή της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών του προβλήματος, με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω. Τέλος, στο τρίτο μέρος του προγράμματος γίνεται η εισαγωγή των δεδομένων, είτε άμεσα μέσα στο πρόγραμμα είτε από κάποιο ξεχωριστό αρχείο, με τη χρήση της εντολής $@OLE$. Το πρόβλημα του χονδρέμπορου, προτυποποιείται ως εξής:

```
MODEL:
 1]SETS:
 2]BULKFOOD/A,B,C,D/:LIMITS;
```