

Περιεχόμενα

Πρόλογος	21
1 Εισαγωγή	25
1.1 Επιχειρησιακή Έρευνα	25
1.2 Μαθηματικός Προγραμματισμός	28
1.2.1 Προτυποποίηση Προβλημάτων	28
1.2.2 Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού (Linear Programming Problems)	30
1.2.3 Προβλήματα Μη - Γραμμικού Προγραμματισμού (Non-Linear Programming Problems-NLP)	37
1.2.4 Προβλήματα Ακεραίου Προγραμματισμού (Integer Programming Problems)	38
1.2.5 Προβλήματα Τετραγωνικού Προγραμματισμού (Quadratic Programming Problems)	40
1.2.6 Προβλήματα Στοχαστικού Προγραμματισμού (Stochastic Programming Problem)	42
1.2.7 Προβλήματα Πολυκριτήριου Προγραμματισμού (Multi-objective Programming Problem)	43
1.3 Συνδυαστική Βελτιστοποίηση	43
1.3.1 Πρόβλημα Εκχώρησης ή Ανάθεσης (Assignment Problem)	43
1.3.2 Το Πρόβλημα της Ικανοποίησης (Satisfiability Problem)	45
1.3.3 Το Πρόβλημα του Σακιδίου (The Knapsack Problem)	46
1.3.4 Το Πρόβλημα των Πολλαπλών Σακιδίων (Multiple Knapsack Problem)	47
1.3.5 Το Γενικευμένο Πρόβλημα Εκχώρησης (Generalized Assignment Problem - GAP)	48
1.3.6 Το Πρόβλημα Συσκευασίας σε Κουτιά (Bin packing problem)	49

2	Στοιχεία από τη Θεωρία Γραφημάτων	51
2.1	Εισαγωγή στη Θεωρία Γραφημάτων - Βασικές έννοιες της θεωρίας γραφημάτων	51
2.1.1	Προσανατολισμένο Γράφημα	55
2.1.2	Υπογραφήματα (Subgraphs) ή Μερικά Γραφήματα (Partial Graphs)	62
2.2	Διαδρομές και συνεκτικότητα	63
2.2.1	Τομές και συνεκτικότητα	67
2.2.2	Επαναπροσανατολισμός γραφήματος	73
2.3	Διμελή και Επίπεδα Γραφήματα	76
2.4	Κύκλοι και διαδρομές Euler και Hamilton	80
2.5	Δένδρα και δάση	86
2.6	Ανεξαρτησία, Κυριαρχία και Κάλυψη	95
2.7	Μήτρες και διανύσματα	100
2.8	Ροές σε γραφήματα	110
2.8.1	Απλοποιήσεις	117
2.9	Ασκήσεις	117
3	Παραδείγματα Προτυποποίησης Προβλημάτων Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης	123
3.1	Παραδείγματα Συνδυαστικής Βελτιστοποίησης	123
3.1.1	Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (Shortest Path Problem)	123
3.1.2	Το πρόβλημα ροής ελαχίστου κόστους (Minimum Cost Flow Problem)	125
3.1.3	Το πρόβλημα της μέγιστης ροής (Maximum Flow Problem)	127
3.1.4	Το πρόβλημα του ελάχιστου τανύοντος δένδρου (Minimum Spanning Tree)	128
3.1.5	Το πρόβλημα του μέγιστου τανύοντος δένδρου (Maximum Spanning Tree)	130
3.1.6	Το πρόβλημα της Σύζευξης (Matching)	130
3.1.7	Το πρόβλημα του χρωματισμού (Coloring Problem)	132
3.1.8	Το πρόβλημα της μεταφοράς (Transportation Problem)	132
3.1.9	Το πρόβλημα των πολυροών εμπορευμάτων σε δίκτυα (Multicommodity Flow Problem)	135
3.1.10	Το πρόβλημα της μέγιστης κλίκας γραφήματος (Maximum clique)	136

3.1.11	Το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (Traveling Salesman Problem -TSP)	136
3.1.12	Το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων (Vehicle Routing Problem -VRP)	140
3.1.13	Το πρόβλημα του Κινέζου ταχυδρόμου (Chinese Postman Problem)	144
3.1.14	Το πρόβλημα του σχεδιασμού δικτύου (Network Design)	145
3.1.15	Το πρόβλημα του προγραμματισμού πληρωμάτων (Crew Scheduling Problem)	146
3.2	Ασκήσεις	147
4	Αλγοριθμική Πολυπλοκότητα	149
4.1	Εισαγωγή	149
4.2	Η έννοια του αλγορίθμου	151
4.3	Ασυμπτωτικές σχέσεις συναρτήσεων	153
4.4	Πρόβλημα, υπόδειγμα και μέγεθος δεδομένων	162
4.5	Πολυπλοκότητα	171
4.6	Συγκρίσεις αλγορίθμων	178
4.7	Ασκήσεις και Προβλήματα	184
5	Ταξινόμηση Προβλημάτων	189
5.1	Εισαγωγή	189
5.2	Μορφές προβλήματος συνδυαστικής βελτιστοποίησης	192
5.3	Οι τάξεις \mathcal{P} , \mathcal{NP} και $\text{Co-}\mathcal{NP}$	211
5.4	Μη-αιτιοκρατικοί πολυωνυμικοί αλγόριθμοι	220
5.5	Πολυωνυμικός μετασχηματισμός και πολυωνυμική αναγωγή	225
5.6	\mathcal{NP} -πλήρη και \mathcal{NP} -δύσκολα προβλήματα	235
5.7	Μικρός κατάλογος γνωστών \mathcal{NPC} -προβλημάτων	240
5.8	Ασκήσεις και Προβλήματα	249
6	Δομές Δεδομένων	255
6.1	Στοιχειώδεις αφηρημένες δομές	255
6.1.1	Διακριτό σύνολο	255
6.1.2	Απεικόνιση	256
6.1.3	Κατάλογος ή γραμμική λίστα	256
6.1.4	Στοίβα και ουρά	258
6.2	Υλοποίηση στοιχειωδών δομών	261
6.2.1	Υλοποίηση διακριτού συνόλου	261
6.2.2	Υλοποίηση απεικόνισης	263

6.2.3	Υλοποίηση Στοίβας	264
6.2.4	Υλοποίηση ουράς	265
6.3	Δομές δένδρων	268
6.3.1	Διαζευκτικά διακριτά σύνολα	268
6.3.2	Ουρά προτεραιότητας και σωρός	278
6.3.3	Υλοποίηση σωρού με απλή παράταξη ως πλήρες δυα- δικό δένδρο	289
6.3.4	Αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη n τιμών (Heapsort) . . .	291
6.4	Δομές δεδομένων για γραφήματα	292
7	Ανίχνευση Γραφημάτων	297
7.1	Εισαγωγή	297
7.2	Πρόβλημα Πρόσβασης (ΠΠ)	298
7.3	Πρόβλημα Διαδρομής (ΠΔ)	299
7.4	Πρόβλημα Διαχωριστικής Τομής (ΠΔΤ)	301
7.5	Δομή δεδομένων στοίβα	310
7.6	Δομή δεδομένων ουρά	311
7.7	Ανίχνευση πρώτα κατά βάθος DFS	312
7.8	Ανίχνευση πρώτα κατά πλάτος BFS	318
7.9	Ανίχνευση κατά πλάτος BS	327
7.10	Ανίχνευση κατά βάθος DS	329
7.11	Τοπολογική διάταξη γραφήματος	331
7.12	Οπισθοϊχνηλασία	333
7.13	Ασκήσεις	362
8	Πρόβλημα Εύρεσης Συντομότερης Διαδρομής και Διακριτός Δυναμικός Προγραμματισμός	367
8.1	Εισαγωγή	367
8.2	Μορφοποίηση του προβλήματος εύρεσης συντομότερης διαδρο- μής	371
8.3	Ανάλυση αλγορίθμων επίλυσης προβλημάτων εύρεσης συντομό- τερης διαδρομής	375
8.4	Προβλήματα του Dijkstra με τη χρήση αρνητικών τόξων και ο αλγόριθμος Ford	379
8.5	Διακριτός Δυναμικός Προγραμματισμός	384
8.5.1	Ο αλγόριθμος Floyd-Warshall	394
8.6	Ασκήσεις	399
9	Το Πρόβλημα της Μέγιστης Ροής	407

9.1	Εισαγωγή	407
9.2	Μορφοποίηση προβλήματος	408
9.3	Αλγοριθμική επίλυση προβλήματος	414
9.4	Ο αλγόριθμος Dinic	417
9.5	Ασκήσεις	428
10 Πρόβλημα Ροής Ελαχίστου Κόστους		433
10.1	Εισαγωγή	433
10.2	Αλγόριθμος Κατάργησης Κυκλικών Διαδρομών (Cycle Cancelling Algorithm)	437
10.3	Αλγόριθμος διαδοχικών συντομότερων διαδρομών (Successive Shortest Path)	446
11 Ελάχιστα τανύοντα δένδρα		455
11.1	Εισαγωγή	455
11.2	Μορφοποίηση προβλήματος - Μαθηματικά πρότυπα για το πρόβλημα MST	458
11.3	Ο αλγόριθμος PRIM	460
11.4	Ο αλγόριθμος Kruskall	466
11.5	Ο αλγόριθμος Solin-Borunvska	468
11.6	Πολυπλοκότητα αλγορίθμων	469
11.7	Αλγόριθμος εύρεσης διακλάδωσης μεγίστου κόστους	470
11.8	Μητροειδή προβλήματα και αλγόριθμοι απληστίας	474
11.9	Μητροειδή	479
11.10	Τομή μητροειδών	483
11.11	Ασκήσεις	486
12 Αλγόριθμος διακλάδωσης και οριοθέτησης		497
12.1	Εισαγωγή	497
12.2	Η διαδικασία διακλάδωσης και οριοθέτησης με τη χρήση χαλαρωμένου προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού	502
12.2.1	Κριτήρια διακοπής της ανάπτυξης του δένδρου απαρίθμησης	503
12.2.2	Υποδιαίρέσεις	503
12.2.3	Επιλογή κόμβων	505
12.2.4	Επιλογή μεταβλητής διακλάδωσης	508
12.3	Ασκήσεις	514
Βιβλιογραφία		516

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Γραμμική σύνδεση στοιχείων	39
1.2	Γραμμική σύνδεση πολλαπλών στοιχείων	39
2.1	Γράφημα	52
2.2	Πολυγράφημα με βρόχο	52
2.3	Πλήρες γράφημα (<i>a</i>) και μη-πλήρες γράφημα (<i>b</i>)	53
2.4	Παράδειγμα καταλόγου προσκείμενων και παρακείμενων τόξων γραφήματος	56
2.5	Διατεταγμένο γράφημα	57
2.6	Παράδειγμα βαθμών των κόμβων γραφήματος	59
2.7	Προσανατολισμένο γράφημα	59
2.8	Μετατροπή μεικτού σε προσανατολισμένο γράφημα	60
2.9	Μη-απλό γράφημα	61
2.10	Απλό γράφημα	61
2.11	Διατεταγμένο συμμετρικό μη-απλό γράφημα και μη-διατεταγμένο συμμετρικό μη-απλό γράφημα	61
2.12	<i>a</i>) Αρχικό γράφημα, <i>b</i>) Γνήσιο μερικό γράφημα, <i>c</i>) Υπογράφημα, <i>d</i>) Μερικό υπογράφημα	63
2.13	Μη-απλή διαδρομή	65
2.14	Απλή διαδρομή	65
2.15	Συνεκτικότητα σε γραφήματα	68
2.16	Η τομή $(\mathcal{S}, \mathcal{N} \setminus \mathcal{S})$ σε (α) μη-προσανατολισμένο και (β) προσανατολισμένο γράφημα αποτελείται από τα τονισμένα τόξα	69
2.17	Ισθμοί και αρθρώσεις	70
2.18	Λευκό τόξο	73
2.19	Μαύρο τόξο	73
2.20	Κόκκινο τόξο	73
2.21	Πράσινο τόξο	73
2.22	Ιχνογραφημένο γράφημα	74
2.23	Συμβατές και μη - συμβατές στοιχειώδης διαδρομές σε γράφημα	75
2.24	Διμελές μη-προσανατολισμένο γράφημα	77

2.25	Διμελές προσανατολισμένο γράφημα	77
2.26	a) επίπεδο γράφημα, b) επίπεδο γράφημα (ισοδύναμο με το a), c) μη-επίπεδο γράφημα	78
2.27	Γράφημα Euler	80
2.28	Κύκλος Hamilton	82
2.29	Δένδρα και δάση	88
2.30	Τανύοντα δένδρα και δάση	89
2.31	Προσανατολισμένα δένδρα	92
2.32	Δυαδικά δένδρα	93
2.33	a) Ανεξάρτητο σύνολο και β) σύνολο κάλυψης	97
2.34	Σύζευξη σε γραφήματα.	97
2.35	a) Κλίκα. β) Ανεξάρτητο σύνολο. γ) Σύνολο κάλυψης κόμβων	98
2.36	Προσανατολισμένο γράφημα	101
2.37	Παράδειγμα διατεταγμένου γραφήματος που αναπαριστάται σε μορφή πίνακα	103
2.38	Σταθμισμένο γράφημα	105
2.39	Σταθμισμένο προσανατολισμένο γράφημα	105
2.40	Σταθμισμένο δένδρο	105
2.41	Διατεταγμένο σταθμισμένο δένδρο	105
2.42	Παράδειγμα δικτύου με ροή	114
2.43	Συμβολισμός ροών σε δίκτυα	114
2.44	Δίκτυο με δύο πηγές και δέκτες	115
2.45	Μετατροπή του προηγούμενου δικτύου σε ένα απλό με μία υπερπηγή και έναν υπερδέκτη	116
2.46	Εφικτή ροή τιμής 10	116
2.47	Εφικτή κυκλοφορούσα ροή τιμής 10	116
2.48	Άσκηση 2.1	118
2.49	Άσκηση 2.3	119
2.50	Οι γέφυρες του Königsberg, για την άσκηση 2.20	122
3.1	Παράδειγμα για την εύρεση του συντομότερου μονοπατιού	125
3.2	Κλασσικό πρόβλημα μεταφοράς	133
3.3	Συμμετρική περίπτωση προβλήματος πλανόδιου πωλητή (TSP)	137
3.4	Μη-συμμετρική περίπτωση προβλήματος πλανόδιου πωλητή (TSP)	138
3.5	Απλό παράδειγμα δρομολόγησης οχημάτων (VRP).	141
4.1	Σχηματική παράσταση αλγορίθμου.	152
4.2	Χρόνος εκτέλεσης $f(n)$ για δεδομένα μεγέθους n	154

4.3	Γραφική σύγκριση του ρυθμού αύξησης συναρτήσεων όλων των κατηγοριών.	161
4.4	Γραφική σύγκριση του ρυθμού αύξησης πολυωνυμικής και υποεκθετικής συνάρτησης	161
4.5	Παράδειγμα πρόσω αστέρα	170
4.6	Παράδειγμα οπίσω αστέρα	171
4.7	Η ύπαρξη πολυωνυμικού αλγορίθμου για μία εύλογη και συνεπή κωδικοποίηση συνεπάγεται την ύπαρξη πολυωνυμικού αλγορίθμου για όλες τις πολυωνυμικά συχετισμένες κωδικοποιήσεις	181
4.8	Γραφήματα για την Άσκηση 4.17.	186
5.1	Ιεραχικό φάσμα της πολυπλοκότητας των προβλημάτων. . .	192
5.2	Κλίκες με δύο, τρεις και τέσσερις κόμβους	198
5.3	Το γράφημα έχει κλίκες των δύο, τριών και τεσσάρων κόμβων, αλλά όχι περισσότερων. Το τόξο $(1, 2)$ π.χ. αποτελεί μία κλίκα. Το υπογράφημα που ορίζεται από τους κόμβους 3, 4, 5 είναι μία κλίκα με τρεις κόμβους, ενώ το υπογράφημα που ορίζεται από τους κόμβους 3, 4, 5, 6 είναι μία κλίκα από τέσσερις κόμβους. Το υπογράφημα που ορίζεται από τους κόμβους 2, 3, 4, 5, 6 δεν είναι πλήρες διότι δεν υπάρχει τόξο μεταξύ των κόμβων 2 και 4, καθώς και μεταξύ των κόμβων 2 και 6. Ως εκ τούτου δεν αποτελεί κλίκα.	199
5.4	Ιεραρχία πολυπλοκότητας των εκδοχών ενός προβλήματος συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Το σύμβολο \times αντιστοιχεί κατά έναν τρόπο στο \leq και εδώ σημαίνει ότι η πολυπλοκότητα του προβλήματος στα αριστερά του δεν υπερβαίνει την πολυπλοκότητα του προβλήματος στα δεξιά του.	201
5.5	Δένδρο αναζήτησης μέσω διχοτόμησης. Η ρίζα του αντιστοιχεί στο αρχικό διάστημα (a, b) . Οι κόμβοι του αμέσως επομένου επιπέδου αντιστοιχούν στα διαστήματα (a, μ) και (μ, b) αντίστοιχα, όπου $\mu = \frac{a+b}{2}$. Το υπόλοιπο δένδρο ορίζεται αναδρομικά. Τα δύο διακλαδούμενα τόξα από κάθε κόμβο παριστούν στις συνθήκες «είτε» και «ή» αντίστοιχα της αναζήτησης. Η αναζήτηση της διχοτόμησης ακολουθεί τη σωστή διαδρομή από τη ρίζα σε ένα φύλλο του δένδρου λαμβάνοντας τη σωστή απόφαση σε κάθε διακλάδωση που συναντά. Η διατρεχόμενη διαδρομή έχει το ίδιο μήκος με το βάθος του δένδρου, δηλαδή $\log_2(b - a)$	203

5.6	Παράδειγμα προβλήματος πλανοδίου πωλητή: (α) υπόδειγμα και (β) η βέλτιστη λύση του	206
5.7	Βήμα προς βήμα κατασκευή μέγιστης κλίκας μέσω αυτοαναγωγής	208
5.8	Τα θετικής απάντησης υποδείγματα $Co - \Pi$ αποτελούν υποσύνολο των υποδειγμάτων αναγνώρισης Π	211
5.9	Μη αιτιοκρατικός πολυωνυμικός αλγόριθμος: Δέχεται υπόδειγμα μεγέθους n και απαντά ναι δημιουργώντας ταυτόχρονα ένα πιστοποιητικό σε $p(n)$ το πολύ πράξεις. Το μέγεθος του πιστοποιητικού δεν υπερβαίνει συνεπώς το $p(n)$. Η διαδικασία επαλήθευσης δέχεται το πιστοποιητικό και επαληθεύει την απάντηση σε $q(p(n))$ το πολύ πράξεις. Ο συνδυασμένος αλγόριθμος έχει πολυπλοκότητα που δεν υπερβαίνει το $p(n) + q(p(n))$	214
5.10	Πιστεύεται, αναπόδεικτα, ότι η σχέση μεταξύ των τάξεων \mathcal{P} και \mathcal{NP} είναι αυτή της εικόνας	218
5.11	Η τοπογραφία των τάξεων \mathcal{P} , \mathcal{NP} και $Co - \mathcal{NP}$, όπως πιστεύεται αναπόδεικτα	219
5.12	Πιθανή πλήρη απαρίθμηση για το BKP σε μορφή αναζήτησης σε δένδρο	222
5.13	Πολυωνυμικός μετασχηματισμός και πολυωνυμική αναγωγή. Στην πρώτη περίπτωση η πολυπλοκότητα του σύνθετου αλγορίθμου είναι $p(n) + q(p(n))$, όπου n το μέγεθος του υποδείγματος για το πρόβλημα Π_1 . Στη δεύτερη περίπτωση η πολυπλοκότητα του σύνθετου αλγορίθμου είναι $g(n)[p(n) + q(p(n))]$	227
5.14	Υποθετική τοπογραφία των τάξεων \mathcal{NP} , \mathcal{NPC} και \mathcal{P}	236
5.15	Υποθετική τοπογραφία όλων των τάξεων	238
5.16	Οι λευκοί και οι μαύροι κόμβοι αποτελούν δύο ανεξάρτητα σύνολα κόμβων αντίστοιχα	242
5.17	Ένα γράφημα \mathcal{G} και το συμπλήρωμά του Γ . Το $\mathcal{N}' = \{1, 2, 4\}$ είναι μία κλίκα στο \mathcal{G} , ενώ το $\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}' = \{3, 5\}$ είναι μία κάλυψη κόμβων στο Γ	243
5.18	Πολυωνυμικοί μετασχηματισμοί \mathcal{NPC} -προβλημάτων	244
5.19	Κλωνοποίηση κόμβου: Αντιστοιχία προσανατολισμένης διαδρομής Hamilton και προσανατολισμένου κύκλου Hamilton	245
5.20	Κλωνοποίηση κόμβου: α) Διαδρομή πλανοδίου πωλητή σε γράφημα, β) μετασχηματισμένο γράφημα ως υπόδειγμα DMST και γ) η λύση του DMST -υποδείγματος που αντιστοιχεί στη διαδρομή του πλανοδίου πωλητή.	246

6.1	Γραμμική λίστα	257
6.2	Στοιβά	259
6.3	Ουρά	260
6.4	Διακριτά σύνολα ως δένδρα	269
6.5	Συμπίεση διαδρομής	275
6.6	Δένδρα σε διάταξη σωρού	279
6.7	Ένθεση νέου στοιχείου στον σωρό	281
6.8	Απαλοιφή στοιχείου από τον σωρό	284
6.9	Απαλοιφή ρίζας σωρού	285
6.10	Αποκατάσταση διάταξης σωρού σε δένδρο	288
6.11	Υλοποίηση με γραμμική παράταξη ενός σωρού σε μορφή πλή- ρους δυαδικού δένδρου	290
6.12	Υλοποίηση ενός σωρού σε μορφή πλήρους δυαδικού δένδρου με γραμμική παράταξη ψευδοδεικτών	291
6.13	Παράδειγμα δικτύου	293
6.14	Συμβολισμός ροών στο δίκτυο	293
6.15	Αναπαράσταση του δικτύου στον υπολογιστή	293
6.16	Αναπαράσταση των πηγών και των δεκτών του δικτύου στον υπολογιστή	294
6.17	Πρόσω Αστέρας του δικτύου στον υπολογιστή	295
6.18	Αναπαράσταση των πηγών και των δεκτών του δικτύου στον υπολογιστή	295
6.19	Πίσω Αστέρας του δικτύου στον υπολογιστή	296
7.1	Προσιτοί και απρόσιτοι κόμβοι	297
7.2	Προσιτά και απρόσιτα σύνολα κόμβων	298
7.3	Τομή διατεταγμένου γραφήματος	300
7.4	Τομή προσανατολισμένου γραφήματος	300
7.5	Διαχωριστική τομή διατεταγμένου γραφήματος	301
7.6	Διαχωριστική τομή προσανατολισμένου γραφήματος	302
7.7	Διαχωριστική τομή μη - διατεταγμένου (μη - προσανατολισμέ- νου) γραφήματος	302
7.8	Παράδειγμα γραφήματος	304
7.9	Αρχικά	304
7.10	Αναδρομή 1	304
7.11	Αναδρομή 2	304
7.12	Αναδρομή 3	304
7.13	Αναδρομή 4	304
7.14	Διαδρομή	305

7.15	Πρώτη περίπτωση της απόδειξης του θεωρήματος 7.2	306
7.16	Δεύτερη περίπτωση της απόδειξης του θεωρήματος 7.2	306
7.17	Δομή δεδομένων σιοίβα	311
7.18	Δομή δεδομένων ουρά	313
7.19	Παράδειγμα για <i>DFS</i>	315
7.20	Συμβολισμός τόξων	315
7.21	Αναδρομή 1 για <i>DFS</i>	315
7.22	Αναδρομή 2 για <i>DFS</i>	315
7.23	Αναδρομή 3 για <i>DFS</i>	316
7.24	Αναδρομή 4 για <i>DFS</i>	316
7.25	Αναδρομή 5 για <i>DFS</i>	316
7.26	Αναδρομή 6 για <i>DFS</i>	316
7.27	Αναδρομή 7 για <i>DFS</i>	317
7.28	Ονομασία τόξων	317
7.29	<i>DFS</i> δένδρο	317
7.30	Διμελές γράφημα για <i>DFS</i>	318
7.31	Αναδρομή 1 για <i>DFS</i> σε διμελές γράφημα	319
7.32	Αναδρομή 2 για <i>DFS</i> σε διμελές γράφημα	319
7.33	Αναδρομή 3 για <i>DFS</i> σε διμελές γράφημα	320
7.34	Αναδρομή 4 για <i>DFS</i> σε διμελές γράφημα	320
7.35	Αναδρομή 5 για <i>DFS</i> σε διμελές γράφημα	321
7.36	Αναδρομή 6 για <i>DFS</i> σε διμελές γράφημα	321
7.37	Αναδρομή 7 για <i>DFS</i> σε διμελές γράφημα	322
7.38	Αναδρομή 8 για <i>DFS</i> σε διμελές γράφημα	322
7.39	Παράδειγμα για <i>BFS</i>	324
7.40	Αναδρομή 1 για <i>BFS</i>	324
7.41	Αναδρομή 2 για <i>BFS</i>	324
7.42	Αναδρομή 3 για <i>BFS</i>	325
7.43	Αναδρομή 4 για <i>BFS</i>	325
7.44	Αναδρομή 5 για <i>BFS</i>	326
7.45	Αναδρομή 6 για <i>BFS</i>	326
7.46	Στρώματα αλγορίθμου <i>BFS</i>	327
7.47	Στρώματα αλγορίθμου <i>BS</i>	328
7.48	Παράδειγμα αλγορίθμου <i>BS</i>	329
7.49	Λύση με <i>BFS</i>	330
7.50	Λύση με <i>BS</i>	330
7.51	Λύση με <i>DS</i>	331
7.52	Παράδειγμα μαθηματικής πράξης	332
7.53	Παράδειγμα κτίσιμο σπιτιού	333

7.54	Μια λύση στο πρόβλημα των 8 - βασιλισσών	335
7.55	Αναπαράσταση του χώρου λύσεων για το πρόβλημα των τεσσάρων βασιλισσών. Οι κόμβοι έχουν αριθμηθεί όπως στην αναζήτηση κατά βάθος	338
7.56	Αναπαράσταση του χώρου λύσεων για το πρόβλημα του αθροίσματος υποσυνόλων. Οι κόμβοι έχουν αριθμηθεί όπως στην αναζήτηση κατά βάθος	339
7.57	Αναπαράσταση του χώρου λύσεων για το πρόβλημα του αθροίσματος υποσυνόλων. Οι κόμβοι έχουν αριθμηθεί όπως στην αναζήτηση κατά βάθος	340
7.58	Αναπαράσταση του χώρου λύσεων του προβλήματος του πλανόδιου πωλητή με $n = 4$ και $i_0 = i_4 = 1$	343
7.59	Παράδειγμα οπισθοϊχνηλασίας για την επίλυση του προβλήματος των τεσσάρων βασιλισσών	346
7.60	Το δέντρο που δημιουργήθηκε με τη χρήση της οπισθοϊχνηλασίας	346
7.61	Αναδιοργάνωση	350
7.62	Δέντρο που δημιουργήθηκε από τον αλγόριθμο οπισθοϊχνηλασίας για το πρόβλημα του σακιδίου	353
7.63	Γράφημα για το παράδειγμα της οπισθοϊχνηλασίας για τανύοντα δέντρα	356
7.64	Αναπαράσταση σε μορφή δέντρου του χώρου λύσεων για το πρόβλημα	357
7.65	Όλα τα τανύοντα δέντρα του παραδείγματος	357
7.66	Άσκηση για διαχωριστικές τομές	362
7.67	Άσκηση για DFS	364
7.68	Άσκηση για DFS	364
7.69	Άσκηση για DFS	364
8.1	Παράδειγμα χρήσης της μεθόδου Dijkstra	369
8.2	Αναδρομή 1	369
8.3	Αναδρομή 2	370
8.4	Αναδρομή 3	370
8.5	Αναδρομή 4	370
8.6	Αποτέλεσμα παραδείγματος χρήσης της μεθόδου Dijkstra	370
8.7	Παράδειγμα μορφοποίησης προβλήματος ελάχιστης διαδρομής	372
8.8	Παράδειγμα για Dijkstra	376
8.9	Αναδρομή 1	376
8.10	Αναδρομή 2	377

8.11	Αναδρομή 3	377
8.12	Αναδρομή 4	377
8.13	Αναδρομή 5	378
8.14	Αναδρομή 6	378
8.15	Αναδρομή 7	378
8.16	Ελάχιστη διαδρομή	379
8.17	Αρνητικός κύκλος	379
8.18	Λάθος του Dijkstra	380
8.19	Αναδρομή 1	380
8.20	Αναδρομή 2	380
8.21	Αναδρομή 3	380
8.22	Βέλτιστη λύση του αλγορίθμου	381
8.23	Εύρεση συντομότερης διαδρομής με την χρήση του αλγορίθμου Ford	382
8.24	Αναδρομή 1	382
8.25	Αναδρομή 2	382
8.26	Αναδρομή 3	383
8.27	Αναδρομή 4	383
8.28	Αναδρομή 5	383
8.29	Αναδρομή 6	383
8.30	Βέλτιστη λύση	383
8.31	Βέλτιστη Διαδρομή	387
8.32	Το πρόβλημα του Σακιδίου σε μορφή προβλήματος δικτύου	389
8.33	Βέλτιστη Διαδρομή	389
8.34	Το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή	391
8.35	Λύση με τη χρήση του αλγόριθμου απληστίας	392
8.36	Το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή με δυναμικό προγραμματισμό	393
8.37	Λύση με τη χρήση του δυναμικού προγραμματισμού	393
8.38	Αλγόριθμος Floyd-Warshall	396
8.39	Αλγόριθμος Floyd-Warshall	397
8.40	Άσκηση 8.3	400
8.41	Άσκηση 8.4	401
8.42	Άσκηση 8.8	403
8.43	Άσκηση 8.9	404
8.44	Άσκηση 8.18	406
9.1	Παράδειγμα μέγιστης ροής σε δίκτυο	409
9.2	Παράδειγμα διαδρομής σε δίκτυο	413

9.3	Εύρεση μέγιστης ροής σε δίκτυο	416
9.4	Αναδρομή 1	416
9.5	Υπολοιπόμενο δίκτυο	416
9.6	Αναδρομή 2	416
9.7	Υπολοιπόμενο δίκτυο	416
9.8	Αναδρομή 3	416
9.9	Υπολοιπόμενο δίκτυο	417
9.10	Αναδρομή 4	417
9.11	Τελικό δίκτυο	417
9.12	Αρχικό σχήμα παραδείγματος για τον αλγόριθμο Dinic . . .	420
9.13	Τα διαφορετικά στρώματα του παραδείγματος	421
9.14	Πρώτη αναδρομή.	423
9.15	Υπολοιπόμενο δίκτυο.	424
9.16	Δεύτερη αναδρομή	425
9.17	Υπολοιπόμενο δίκτυο	425
9.18	Τρίτη αναδρομή	425
9.19	Υπολοιπόμενο δίκτυο	426
9.20	Τέταρτη αναδρομή	426
9.21	Υπολοιπόμενο δίκτυο	427
9.22	Πέμπτη αναδρομή	427
9.23	Υπολοιπόμενο δίκτυο	428
9.24	Παράδειγμα 1 άσκησης 9.1	428
9.25	Παράδειγμα 2 άσκησης 9.1	429
9.26	Παράδειγμα 3 άσκησης 9.1	429
9.27	Παράδειγμα 4 άσκησης 9.1	430
9.28	Παράδειγμα 5 άσκησης 9.1	430
9.29	Παράδειγμα 1 άσκησης 9.2	431
9.30	Παράδειγμα 2 άσκησης 9.2	432
9.31	Παράδειγμα 3 άσκησης 9.2	432
10.1	Παράδειγμα προβλήματος ροής ελαχίστου κόστους σε δίκτυο	435
10.2	Αρχική εφικτή ροή	438
10.3	Υπολοιπόμενο δίκτυο 1ης επανάληψης, στο οποίο παρουσιάζονται μόνο οι χωρητικότητες	439
10.4	Υπολοιπόμενο δίκτυο 1ης επανάληψης, στο οποίο παρουσιάζονται μόνο τα κόστη	440
10.5	Κυκλική διαδρομή αρνητικού κόστους	440
10.6	Ροή στην κυκλική διαδρομή αρνητικού κόστους	441
10.7	Καινούριο υπολοιπόμενο δίκτυο	441

10.8	Ροή μετά την πρώτη επανάληψη	442
10.9	Υπολοιπόμενο δίκτυο 2ης επανάληψης, στο οποίο παρουσιάζονται μόνο τα κόστη	443
10.10	Κυκλική διαδρομή αρνητικού κόστους	443
10.11	Ροή στην κυκλική διαδρομή αρνητικού κόστους	444
10.12	Καινούριο υπολοιπόμενο δίκτυο	444
10.13	Ροή μετά τη δεύτερη επανάληψη	445
10.14	Αρχικό Δίκτυο	447
10.15	1η επανάληψη του αλγορίθμου	448
10.16	Υπολοιπόμενο δίκτυο	449
10.17	Υπολοιπόμενο δίκτυο	450
10.18	2η επανάληψη	450
10.19	1η επανάληψη αλγορίθμου συντομότερης διαδρομής	451
10.20	2η επανάληψη αλγορίθμου συντομότερης διαδρομής	452
10.21	Υπολοιπόμενο δίκτυο	452
10.22	1 επανάληψη του αλγορίθμου	453
10.23	Υπολοιπόμενο δίκτυο	454
10.24	Ροή στο δίκτυο	454
11.1	Δένδρα και δάση	456
11.2	Προσανατολισμένα δένδρα	457
11.3	Τανύοντα δένδρα και δάση	457
11.4	Τανύοντα δένδρα και δάση	459
11.5	Αρχικό γράφημα για λύση με τον αλγόριθμο PRIM	462
11.6	Minimal Spanning Tree	462
11.7	Δενδροειδές	470
11.8	Διαδικασία αντικατάστασης κύκλου με έναν κόμβο	472
11.9	Αρχικό γράφημα για <i>TSP</i>	476
11.10	Λύση του <i>TSP</i> με αλγόριθμο απληστίας	476
11.11	Αρχικό γράφημα για <i>DST</i>	477
11.12	Λύση του <i>DST</i> με αλγόριθμο απληστίας	477
11.13	Βέλτιστη λύση του <i>DST</i> με αλγόριθμο απληστίας	477
11.14	Τμηματοποιημένα μητροειδή	482
11.15	Τομή μητροειδών	484
11.16	Προσαρμοσμένο γράφημα	485
11.17	Τελικό γράφημα χωρίς κύκλους	485
11.18	Δενδροειδές	486
11.19	Άσκηση 11.3	488
11.20	Άσκηση 11.6	489

11.21	Άσκηση 11.7	490
11.22	Άσκηση 11.8	491
11.23	Άσκηση 11.9	491
11.24	Άσκηση 11.10	492
11.25	Άσκηση 11.11	493
11.26	Άσκηση 11.12	493
11.27	Άσκηση 11.16	495
12.1	Η ιδέα της μεθόδου διακλάδωσης και οριοθέτησης	498
12.2	Οι επαναληπτικές υποδιαιρέσεις του αλγορίθμου διακλάδωσης και οριοθέτησης	499
12.3	Παράδειγμα του αλγορίθμου διακλάδωσης και οριοθέτησης .	501
12.4	Πρώτη περίπτωση	504
12.5	Δεύτερη περίπτωση	504
12.6	Τρίτη περίπτωση	505
12.7	Ανίχνευση κατά βάθος	506
12.8	Παράδειγμα μεθόδου διακλάδωσης και οριοθέτησης	512