Για την δεύτερη ταυτότητα θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Ξεκινώντας για $n = 2$ διαπιστώνουμε ότι έχουμε την γνωστή ταυτότητα

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο n και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$. Ξεκινώντας από το δεξί μέλος, έχουμε

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \\
= & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + a^{n+1} \\
= & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + a^{n+1} \\
= & \; a(a+b)^n + b(a+b)^n \\
= & \; (a+b)^{n+1}
\end{aligned}$$

όπου για να πάρουμε την τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα που αποδείξαμε προηγούμενα. □

Πρόταση 35 (Ανισότητα Bernoulli) *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x > -1$ ισχύει ότι*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται εύκολα με επαγωγή. Για $n = 1$ είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$ δηλαδή

$$(1+x)^k \geq 1 + kx$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n = k+1$

$$\begin{aligned}
(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) \\
&\geq (1+kx)(1+x) \\
&= 1 + (k+1)x + kx^2 \\
&\geq 1 + (k+1)x
\end{aligned}$$

όπου για να πάρουμε την τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το δεύτερο μέρος της επαγωγής. □

Πρόταση 36 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) *Αν τα a_k και b_k είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + tb_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2t\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + t^2\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geq 0 \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

Έτσι λοιπόν η εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς t

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2t\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + t^2\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 0$$

θα έχει είτε μια πραγματική ρίζα είτε δυο συζυγείς μιγαδικές αλλιώς θα άλλαζε πρόσημο για κατάλληλες επιλογές του t. Αυτό σημαίνει ότι η διακρίνουσα είναι πάντοτε αρνητική ή μηδέν, δηλαδή ισχύει η ζητούμενη ανισότητα. □

Το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ αποτελείται από τους αριθμούς $\frac{m}{n}$ με $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

Πρόταση 37 *Υπάρχει ένας μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός x τ.ω. $x^n = a$ όταν $a \geq 0$ με $n \in \mathbb{N}$ ο οποίος συμβολίζεται ως $\sqrt[n]{x}$ ή $x^{\frac{1}{n}}$. Ειδικότερα, υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός x τ.ω. $x^2 = 2$ ο οποίος δεν είναι ρητός αριθμός.*

Απόδειξη. Θα χρειαστούμε την ανισότητα

$$(1+\varepsilon)^n < 1 + 3^n\varepsilon \tag{1.1}$$

όπου $\varepsilon \in (0,1)$ την οποία θα αποδείξουμε αμέσως τώρα. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Για $n = 1$ προφανώς ισχύει $1 + \varepsilon < 1 + 3\varepsilon$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο n και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$. Οπότε

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^{n+1} &= (1+\varepsilon)^n(1+\varepsilon)\\ &< (1+3^n\varepsilon)(1+\varepsilon)\\ &= 1 + (3^n\varepsilon + 3^n + 1)\varepsilon\\ &< 1 + 3^{n+1}\varepsilon\end{aligned}$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε την ύπαρξη μοναδικού αριθμού x τ.ω. $x^n = a$. Η μοναδικότητα έπεται από το γεγονός ότι $x^n < y^n$ όταν $x < y$. Αν $a = 0$ τότε $x = 0$. Υποθέτουμε ότι $a > 0$ και ορίζουμε το σύνολο

$$E = \{t \in \mathbb{R} : t > 0,\ t^n < a\}$$

Το E είναι μη κενό αφού το $t_0 = \frac{a}{1+a} \in E$ το οποίο αποδεικνύεται πολύ εύκολα με επαγωγή στο n. Επίσης το E είναι άνω φραγμένο από το $1 + a$ διότι για $t \leq 1$ έχουμε ότι $t < 1 + a$ ενώ για $t > 1$ έχουμε ότι $t \leq t^n < a < 1 + a$. Από το αξίωμα 28 προκύπτει ότι το E έχει supremum, έστω x το οποίο ανήκει στο $\mathbb{R}$. Προφανώς $t_0 \leq x$ και θα αποδείξουμε ότι στην πραγματικότητα $x^n = a$. Έστω ότι $x^n < a$. Διαλέγουμε $\varepsilon \in (0, 1)$ τ.ω. $\varepsilon < \frac{a-x^n}{(3x)^n}$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα 1.1

$$\begin{aligned} x^n(1+\varepsilon)^n &< x^n(1+3^n\varepsilon) \\ &= x^n + (3x)^n\varepsilon \\ &< x^n + (a - x^n) \\ &= a \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι $x(1 + \varepsilon) \in E$. Όμως $x = \sup E$ και αυτό είναι άτοπο άρα $x^n \geq a$.

Έστω ότι $x^n > a$. Διαλέγουμε $\varepsilon \in (0, 1)$ τ.ω. $\varepsilon < \frac{x^n-a}{3^n a}$. Οπότε $a(1 + 3^n\varepsilon) < x^n$ και επομένως χρησιμοποιώντας πάλι την ανισότητα 1.1 προκύπτει ότι

$$a < \frac{x^n}{1+3^n\varepsilon} < \left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^n$$

Επειδή $\frac{x}{1+\varepsilon} < x$ μπορούμε να βρούμε κάποιο $t \in E$ έτσι ώστε

$$\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^n < t^n < a$$

το οποίο είναι άτοπο επομένως αναγκαστικά $x^n = a$.

Υπάρχει λοιπόν μοναδικός θετικός αριθμός x τ.ω. $x^2 = 2$. Αν x είναι ρητός τότε υπάρχουν $n, m \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $x = \frac{m}{n}$ και ο n να μην διαιρεί τον m. Τότε και ο n^2 δεν διαιρεί τον m^2 επομένως αν υποθέσουμε ότι $x^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$ θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Άρα $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Επομένως ισχύει ότι $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$ και το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ αποτελείται από πραγματικούς αριθμούς που δεν είναι ρητοί οι οποίοι ονομάζονται άρρητοι.

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Με $|a|$ θα εννοούμε τον αριθμό a αν $a > 0$ και $-a$ αν $a < 0$. Ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του a και όπως βλέπουμε είναι πάντοτε θετικός αριθμός. Ισχύει η επόμενη ανισότητα για την απόλυτη τιμή, η οποία ονομάζεται τριγωνική ανισότητα,

$$\Big||a| - |b|\Big| \leq |a + b| \leq |a| + |b|. \tag{1.2}$$

Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση.

Με $[a]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του αριθμού a, δηλαδή είναι ο προηγούμενος ακέραιος αριθμός πριν από τον αριθμό a και ισχύει ότι

$$[a] \leq a \leq [a] + 1$$

Προταση 38 (Ανισοτητα αριθμητικου-γεωμετρικου μεσου) *Έστω ότι οι $a_1, \cdots, a_n$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Τότε*

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Αποδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n > n \tag{1.3}$$

όταν $n \in \mathbb{N}$ και $b_1, \cdots, b_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί όχι όλοι ίσοι μεταξύ τους και τέτοιοι ώστε $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$. Η απόδειξη της σχέσης αυτής είναι επαγωγική. Για $n = 2$ έχουμε ότι

$$0 < \left(\sqrt{b_1} - \sqrt{b_2}\right)^2 = b_1 + b_2 - 2$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $b_1 \neq b_2$. Επομένως για $n = 2$ ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k + 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $b_1 \leq b_j \leq b_{k+1}$ όπου $j = 1, 2, \cdots, k + 1$ και $b_1 < b_{k+1}$. Τότε αναγκαστικά $b_1 < 1 < b_{k+1}$ διότι αλλιώς $b_1 b_2 \cdots b_n \neq 1$. Άρα, έχουμε ότι

$$b_2 + \cdots + b_k + b_1 b_k \geq k$$

από την υπόθεση της επαγωγής. Επομένως, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} b_1 + \cdots + b_{k+1} &= (b_1 b_{k+1} + b_2 + \cdots + b_k) + 1 \\ &\quad +(b_{k+1} - 1)(1 - b_1) \\ &\geq k + 1 + (b_{k+1} - 1)(1 - b_1) \\ &> k + 1 \end{aligned}$$

Άρα, ισχύει και για $k + 1$ επομένως, επαγωγικά, ισχύει το ζητούμενο.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε την ανισότητα του αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου. Η ανισότητα είναι προφανής για $n = 1$ ή όταν $a_j = 0$ για κάποιο j ή όταν $a_1 = \cdots = a_n$. Επομένως, υποθέτουμε ότι $n > 1$, $a_j > 0$ για κάθε j και $a_1 < a_n$. Θέτουμε

$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} > 0$ και συμβολίζουμε με $b_j = \frac{a_j}{G}$. Τότε $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$, $b_j > 0$ και $b_1 < b_n$. Επομένως, ισχύει ότι

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n > n$$

και αντικαθιστώντας τα b_j προκύπτει η ανισότητα του αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου. □

Πρόταση 39 *Αν a, b είναι πραγματικοί αριθμοί και $a < b$ τότε υπάρχει ένας ρητός αριθμός c και ένας άρρητος d στο διάστημα (a, b).*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την Αρχιμήδεια ιδιότητα των φυσικών αριθμών διαλέγουμε κάποιο $s \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{b-a} < s$ οπότε $\frac{1}{s} < b - a$. Έστω $z = [sa] + 1 \in \mathbb{Z}$ οπότε $z - 1 \leq sa < z$ και επομένως $a < \frac{z}{s} \leq a + \frac{1}{s} < b$. Ο ρητός αριθμός $c = \frac{z}{s}$ βρίσκεται στο διάστημα (a, b).

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει άρρητος αριθμός στο διάστημα (a, b). Όπως προηγούμενα, μπορούμε να βρούμε έναν ρητό αριθμό u στο διάστημα $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. Θέτουμε $d = u\sqrt{2}$ και προκύπτει ότι $d \in (a, b)$. Είναι όμως εύκολο να δούμε ότι ο d είναι άρρητος. □

1.1.3 Τοπολογική δομή του $\mathbb{R}$

Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε μερικούς βασικούς ορισμούς και θα διατυπώσουμε (χωρίς απόδειξη) μερικά αποτελέσματα που αφορούν την τοπολογική δομή του $\mathbb{R}$, δεν θα χρησιμοποιήσουμε όμως κανένα από τα αποτελέσματα αυτά στην συνέχεια.

Θα ονομάζουμε $\varepsilon-$περιοχή του σημείου $a \in \mathbb{R}$ το ανοιχτό διάστημα $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (όπου $\varepsilon > 0$) και συμβολίζεται με $\rho(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$. Το σημείο $a \in A$ ονομάζεται εσωτερικό σημείο του A **ανν** υπάρχει ε-περιοχή του a που να ανήκει στο A. Θα ονομάζουμε μεμονωμένο το σημείο $a \in A$ όταν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω. $\rho(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$. Σημείο συσσώρευσης του A ονομάζεται το σημείο $a \in \mathbb{R}$ τ.ω. για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\rho(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζεται ανοιχτό όταν αποτελείται μόνο από εσωτερικά σημεία. Κλειστό ονομάζεται όταν το συμπλήρωμα του στο $\mathbb{R}$ είναι ανοιχτό.

Πρόταση 40 *Τα σύνολα $\mathbb{R}, \emptyset$ είναι ανοιχτά και κλειστά σύνολα. Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό ενώ η ένωση οσωνδήποτε ανοιχτών είναι ανοιχτό σύνολο. Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών είναι κλειστό σύνολο. Η τομή οσωνδήποτε κλειστών είναι κλειστό.*

Πρόταση 41 *Αν $a \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης του $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε σε κάθε περιοχή του a υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 42 *Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ είναι κλειστό* ανν *περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 43 (Bolzano-Weierstrass) *Κάθε άπειρο και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ένα τουλάχιστο σημείο συσσώρευσης.*

Για μια απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος χρησιμοποιώντας ακολουθίες αριθμών δείτε τα 122 και 128.

Αποδείξεις και βαθύτερη ανάλυση στα παραπάνω θέματα μπορεί να βρει κανείς στα βιβλία [6], [8], [9], [17], [32].

1.2 Συναρτήσεις

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τις συναρτήσεις, όρια και συνέχεια συναρτήσεων, παραγώγους και εφαρμογές τους.

Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$. Συνάρτηση είναι μια απεικόνιση του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$. Όπως συχνά λέμε, είναι μια μηχανή που την τροφοδοτείς με πραγματικούς αριθμούς και σου επιστρέφει πραγματικούς αριθμούς. Το σύνολο από το οποίο διαλέγεις αριθμούς για την συνάρτηση λέγεται πεδίο ορισμού ενώ το σύνολο που σου επιστρέφει η συνάρτηση λέγεται πεδίο τιμών. Συνήθως συμβολίζουμε την συνάρτηση ως εξής, $f(x) : I \to \mathbb{R}$. Με f συμβολίζουμε την συνάρτηση, με x το όρισμα της και με τα υπόλοιπα εννοούμε ότι η f παίρνει τιμές από το σύνολο I και δίνει τιμές στο $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα μια συνάρτηση είναι η $f(x) = x^2$, δίνοντας της έναν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, αυτή σου επιστρέφει το τετράγωνό του. Σημειώστε ότι, μια συνάρτηση σε κάθε έναν πραγματικό αριθμό πρέπει να αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό αλλιώς την ονομάζουμε απεικόνιση. Το σύνολο I μπορεί να είναι όλο το $\mathbb{R}$ ή οποιοδήποτε υποσύνολο του, αρκεί βέβαια να ορίζεται η συνάρτηση. Αν αναλογιστούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ τότε το πεδίο ορισμού δεν μπορεί να περιέχει το 0.

Μια χρήσιμη έννοια, όπως θα δούμε παρακάτω, είναι η έννοια του ορίου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 44 (ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ) *Έστω μια συνάρτηση $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και κάποιο $\xi \in I$.*

- *Θα λέμε ότι η f προσεγγίζει το $A \in \mathbb{R}$ καθώς το $x \in I$ προσεγγίζει το ξ όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τ.ω. $|f(x) - A| \leq \varepsilon$ όταν $|x - \xi| \leq \delta$. Συμβολίζεται με*

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = A$$

- *Θα λέμε ότι η f αποκλίνει στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) καθώς $x \to \xi$ όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $f(x) > M$ (αντίστοιχα $f(x) < -M$) όταν $|x - \xi| < \delta$. Συμβολίζεται με*

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \pm\infty$$

- *Θα λέμε ότι η f προσεγγίζει το $A \in \mathbb{R}$ καθώς $x \to +\infty$ (αντίστοιχα καθώς $x \to -\infty$) όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε αρκετά μεγάλο $M > 0$ έτσι ώστε $|f(x) - A| < \varepsilon$ όταν $x > M$ (αντίστοιχα όταν $x < -M$). Συμβολίζεται με*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = A$$

- *Θα λέμε ότι η f αποκλίνει στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) καθώς το $x \to +\infty$ όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει αρκετά μεγάλο $N > 0$ έτσι ώστε $f(x) > M$ (αντίστοιχα $f(x) < -M$) όταν $x > N$. Συμβολίζεται με*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$$

Παρόμοια ο ορισμός του ορίου

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$$

- *Θα λέμε ότι η f συγκλίνει στο $A \in \mathbb{R}$ καθώς $x \to \xi^+$ (ή αλλιώς καθώς το x τείνει στο ξ από δεξιά) όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $|f(x) - A| < \varepsilon$ όταν $\xi < x < \xi + \delta$. Συμβολίζεται με*

$$\lim_{x \to \xi^+} f(x) = A$$

Παρόμοια, οι ορισμοί για $x \to \xi^-$ και για $A = \pm\infty$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 45 *Ισχύει η συνεπαγωγή*

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x \to \xi^+} f(x) = A \text{ και } \lim_{x \to \xi^-} f(x) = A$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όταν ισχύει το ευθύ, δηλαδή

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = A$$

τότε είναι προφανές ότι ισχύουν και τα

$$\lim_{x \to \xi^+} f(x) = A \text{ και } \lim_{x \to \xi^-} f(x) = A$$

Αντίστροφα, αν ισχύει ότι

$$\lim_{x\to\xi^+} f(x) = A \text{ και } \lim_{x\to\xi^-} f(x) = A$$

θα αποδείξουμε ότι και

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = A$$

Ως δεδομένο έχουμε λοιπόν ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta_1, \delta_2 > 0$ έτσι ώστε $|f(x) - A| < \varepsilon$ όταν $\xi < x < \xi + \delta_1$ ή όταν $\xi - \delta_2 < x < \xi$. Διαλέγουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ και επομένως ισχύει ότι $|f(x) - A| < \varepsilon$ όταν $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ ή αλλιώς $|x - \xi| < \delta$. Άρα ισχύει και το ευθύ. $\square$

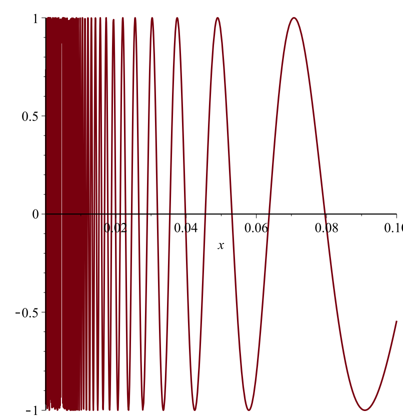
Ο αυστηρά μαθηματικός ορισμός των τριγωνομετρικών, λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων θα γίνει παρακάτω. Σε επόμενα παραδείγματα και ασκήσεις όμως θα χρησιμοποιηθούν οι συναρτήσεις αυτές και οι ιδιότητες τους θεωρώντας γνωστά τα βασικά χαρακτηριστικά τους.

Παραδείγματα

• Η συνάρτηση $f(x) = x$ έχει όριο το ξ όταν $x \to \xi$. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ το οποίο μπορούμε να επιλέξουμε να είναι ίσο με το ε έτσι ώστε

$$|x - \xi| < \varepsilon \text{ όταν } |x - \xi| < \delta$$

• Ως δεύτερο παράδειγμα μπορούμε να δούμε την συνάρτηση $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ και να αποδείξουμε ότι δεν έχει όριο στο 0. Αν είχε κάποιο όριο, έστω A, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ πρέπει να υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$ να ισχύει ότι $|\sin\frac{1}{x} - A| < \varepsilon$. Στο διάστημα όμως $(-\delta, \delta)$ ανήκουν οι αριθμοί $\frac{1}{2\pi n}, \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ για αρκετά μεγάλο n. Όμως η τιμή της $\sin\frac{1}{x}$ στα σημεία αυτά είναι ίση με $0, 1$ αντίστοιχα.



Σχήμα 1.1: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

• Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$ αποκλίνει στο $+\infty$ καθώς $x \to 1^-$ και στο $-\infty$ καθώς $x \to 1^+$. Πράγματι, αν $x \to 1^-$ θα αποδείξουμε ότι $f(x) \to +\infty$. Για κάθε $M > 0$ θα πρέπει να βρούμε κατάλληλο $\delta > 0$ έτσι ώστε για $1 - \delta < x < \delta$ να ισχύει $f(x) > M$. Διαλέγοντας $\delta = \frac{1}{M}$ προκύπτει ότι $\frac{1}{1-x} > M$ όταν $x \in (1 - \delta, 1)$.

• Η συνάρτηση $f(x) = x$ αποκλίνει στο $+\infty$ καθώς $x \to +\infty$ και στο $-\infty$ καθώς $x \to -\infty$.
• Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{όταν } x \leq \frac{1}{2} \\ x, & \text{όταν } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

δεν έχει όριο στο σημείο $x = \frac{1}{2}$ αλλά τα αριστερά και δεξιά όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 46 *Αν* $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ *καθώς* $x \to \xi$, *τότε* $f(x) + g(x) \to A + B$, $\quad f(x)g(x) \to AB$, $\quad \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$ *αν* $B \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *και* $A \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα αποδείξουμε πρώτα την ιδιότητα του αθροίσματος. Σαν δεδομένο έχουμε ότι

$$\forall \varepsilon,\ \exists \delta_1 > 0,\ \text{τ.ω. αν } |x - \xi| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\forall \varepsilon,\ \exists \delta_2 > 0,\ \text{τ.ω. αν } |x - \xi| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Διαλέγουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Τότε ισχύουν και οι δύο παραπάνω προτάσεις με το ίδιο δ. Μπορούμε να προσθέσουμε κατά μέλη τις ανισότητες, και άρα έχουμε ότι

$$\forall \varepsilon,\ \exists \delta (= \min\{\delta_1, \delta_2\})\ \text{τ.ω. αν } |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (A + B)| < \varepsilon.$$

Αυτό βέβαια σημαίνει ακριβώς αυτό που θέλαμε.
Για το γινόμενο, δουλεύουμε παρομοίως, δηλαδή

$$\forall \varepsilon_1,\ \exists \delta_1 > 0,\ \text{τ.ω. αν } |x - \xi| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon_1$$
$$\forall \varepsilon_2,\ \exists \delta_2 > 0,\ \text{τ.ω. αν } |x - \xi| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon_2.$$

Υποθέτουμε ότι $B \neq 0$. Εφόσον $f(x) \to A$ τότε για όλα τα x τ.ω. $|x - \xi| \leq \delta_1$ έχουμε ότι $|f(x)| < M$ για μια σταθερά $M > 0$. Διαλέγουμε $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon/2}{|B|}$ και $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon/2}{M}$ για κάποιο δοσμένο $\varepsilon > 0$ και $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - AB| &= |f(x)g(x) - f(x)B + f(x)B - AB| \\ &\leq |f(x)|\,|g(x) - B| + |B|\,|f(x) - A| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που $A = B = 0$ τότε η απόδειξη είναι απλούστερη, αφού

$$|f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leq \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

Διαλέγοντας $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2$ παίρνουμε το αποτέλεσμα.
Το πηλίκο είναι εντελώς παρόμοιο, αρκεί να υποθέσουμε ότι $B \neq 0$ αφού μπορεί κάποιος να το δει ως το γινόμενο των συναρτήσεων $f(x)\frac{1}{g(x)}$. □

Όπως είπαμε πριν, η έννοια του ορίου είναι χρήσιμη στον ορισμό της συνέχειας.

Ορισμος 47 *Μια συνάρτηση λέγεται συνεχής στο σημείο $\xi \in \mathbb{R}$ αν*

- *η $f(x)$ είναι ορισμένη σε μια ε-περιοχή του ξ,*
- *έχουμε ότι $f(x) \to A$ καθώς $x \to \xi$ και*
- *$A = f(\xi)$.*

Επίσης, μια συνάρτηση λέγεται δεξιά συνεχής (αντίστοιχα αριστερά συνεχής) στο $\xi \in \mathbb{R}$ αν

- *η $f(x)$ είναι ορισμένη σε μια περιοχή του ξ της μορφής $[\xi, \xi+\varepsilon)$ (αντίστοιχα $(\xi-\varepsilon, \xi]$) όπου $\varepsilon > 0$*
- *έχουμε ότι $f(x) \to A$ καθώς $x \to \xi^+$ (αντίστοιχα καθώς $x \to \xi^-$),*
- *$A = f(\xi)$.*

Προταση 48 *Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\xi \in \mathbb{R}$* **ανν** *είναι δεξιά και αριστερά συνεχής στο σημείο αυτό.*

Αποδειξη. Η απόδειξη είναι προφανής χρησιμοποιώντας το θεώρημα 45. □

Παραδείγματα

• Η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $\xi \in \mathbb{R}$ αφού όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \xi = f(\xi)$$

• Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{όταν } x \leq \frac{1}{2} \\ x, & \text{όταν } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

είναι αριστερά συνεχής στο $\frac{1}{2}$ αλλά όχι δεξιά συνεπώς δεν είναι συνεχής στο $x = \frac{1}{2}$.

• Η συνάρτηση

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

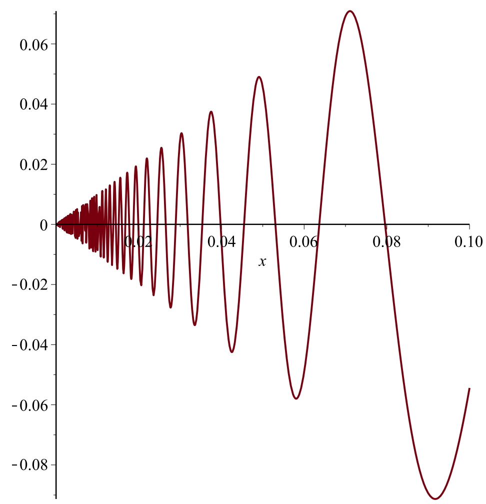
δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του $\mathbb{R}$ διότι θα έπρεπε για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ να ισχύει ότι $|D(x) - D(\xi)| < \varepsilon$. Όμως σε κάθε διάστημα υπάρχουν και ρητοί και άρρητοι αριθμοί και άρα μια τέτοια ανισότητα δεν είναι εφικτή είτε το $\xi \in \mathbb{Q}$ είτε όχι.

• Η συνάρτηση $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ είναι συνεχής παντού εκτός από το μηδέν στο οποίο δεν ορίζεται και επομένως δεν είναι συνεχής σε αυτό το σημείο. Όμως το όριο υπάρχει καθώς $x \to 0$ και είναι ίσο με το μηδέν, διότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δ (μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε $\delta < \varepsilon$) έτσι ώστε

$$|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| < \varepsilon \quad \text{όταν } |x| < \delta$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση $\hat{f}(x)$ η οποία να συμπίπτει με την προηγούμενη σε όλα τα σημεία εκτός του μηδενός και στο μηδέν να είναι ίση με μηδέν, δηλαδή

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{όταν } x \neq 0 \\ 0, & \text{όταν } x = 0 \end{cases}$$



Σχήμα 1.2: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

Η $\hat{f}(x)$ είναι συνεχής παντού (και στο μηδέν) και ονομάζεται η **συνεχής επέκταση** της $f(x)$. Γενικά αυτό είναι εφικτό όταν μια συνάρτηση δεν ορίζεται σε ένα σημείο x_0 αλλά έχει όριο καθώς $x \to x_0$, έστω A. Οπότε σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε νέα συνάρτηση

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{όταν } x \neq x_0 \\ A, & \text{όταν } x = x_0 \end{cases}$$

□

Ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 49 *Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο ξ και $f(\xi) \neq 0$ τότε η $f(x)$ διατηρεί το ίδιο πρόσημο με την $f(\xi)$ σε μια περιοχή του ξ.*