# *Κεφάλαιο 1*
# *Ειδικές Συναρτήσεις*

## 1.0 Εισαγωγή

Όπως θα φανεί στις επόμενες παραγράφους, τα μαθηματικά αποτελούν το θεμέλιο λίθο, αλλά και την οδό της επίλυσης του φυσικού προβλήματος. Γι αυτό παρουσιάζονται πιο κάτω χρήσιμες βασικές συναρτήσεις που συναντώνται στην επίλυση προβλημάτων και εφαρμογών, που βάση, κυρίως, έχουν τη Φυσική. Άλλες εφαρμογές αναπτύσσονται και σε άλλους κλάδους, όπως π.χ. η συνάρτηση Β και Γ χρησιμοποιούνται και στη Στατιστική. Άλλες πάλι ειδικές μορφές συναρτήσεων, όπως οι υπεργεωμετρικές χρησιμοποιούνται στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων.

Παραλείπονται οι περίπλοκες και σε πολλές περιπτώσεις περίτεχνες αποδείξεις αφού στόχος είναι να πειστεί ο αναγνώστης για τη χρησιμότητα των μεθόδων και όχι να εντρυφήσει στις υπέροχες αποδείξεις.

## 1.1 Εξίσωση του Laplace – Συστήματα Συντεταγμένων

Η πιο συνηθισμένη εξίσωση σε θέματα μαθηματικής φυσικής, είναι μάλλον η *εξίσωση του Laplace*, δηλαδή η εξίσωση

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{1.1.1}$$

όπου φ είναι η συνάρτηση φ (x,y,z) που περιγράφει το φυσικό φαινόμενο υπό μελέτη. Άρα το μαθηματικό πρόβλημα είναι αν και ποιες συναρτήσεις φ, ικανοποιούν την (1.1.1) που σε καρτεσιανές συντεταγμένες, είναι :

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{1.1.2}$$

και καλείται τότε η φ **αρμονική συνάρτηση**.

**Παράδειγμα 1.1.1 :** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση φ(x,y) είναι αρμονική με :

$$\varphi(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$$

Πρέπει να ισχύει η (1.1.2). Είναι :

$$\phi_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \phi_y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\phi_{xx} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \phi_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

οπότε $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$ ο.ε.δ.

Αν για παράδειγμα η συνάρτηση φ περιγράφει το **ηλεκτροστατικό δυναμικό** (electrostatic potential) ενός συστήματος, η φ (x,y,z) θα είναι σταθερή πάνω σε μία **αγώγιμη επιφάνεια** (conducting surface).

Σε πολλές περιπτώσεις, αυτές οι **συντεταγμένες,** δες Κεφάλαιο 5, Τόμου Ι, που ορίζεται μια συνάρτηση φ, είναι επιθυμητό να είναι ορισμένη σε μη καρτεσιανές (κυρτές) συντεταγμένες. Δηλαδή το σύστημα συντεταγμένων (x , y, z), μετατρέπεται, ακριβέστερα μετασχηματίζεται, στο $(q_1, q_2, q_3)$, μέσω των γενικών σχέσεων :

$$x = x(q_1,q_2,q_3) \qquad y = y(q_1,q_2,q_3) \qquad z = z(q_1,q_2,q_3) \tag{1.1.3}$$

Η Jacobian του μετασχηματισμού, δες ενότητα 8.5 Τόμου Ι είναι τότε $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)} = \mathrm{Jac}$

Σε μία τέτοια περίπτωση η γενική μορφή της (1.1.1) μετατρέπεται σε, δες και ενότητα 7.2, τόμου Ι:

$$\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j}=0 \qquad \text{i,j=1,2,3} \qquad (1.1.4)$$

με ($q_1$, $q_2$, $q_3$) ορθογώνιο κυρτό σύστημα συντεταγμένων. Με ένα τέτοιο μετασχηματισμό το **ευκλείδειο μήκος** $dl^2$ και ο όγκος dV που ισούνται αντίστοιχα με:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (1.1.5α)$$

$$dV = dx\, dy\, dz \qquad (1.1.5β)$$

μετατρέπονται σε :

$$dl^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 \qquad (1.1.6α)$$

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \qquad (1.1.6β)$$

με

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2 \qquad (1.1.6γ)$$

Επιπλέον η Laplacian (1.1.1) γίνεται :

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1\cdot h_2\cdot h_3}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial q_1}\left(\dfrac{h_2h_3}{h_1}\dfrac{\partial\phi}{\partial q_1}\right)+\\ +\dfrac{\partial}{\partial q_2}\left(\dfrac{h_3h_1}{h_2}\dfrac{\partial\phi}{\partial q_2}\right)+\dfrac{\partial}{\partial q_3}\left(\dfrac{h_1h_2}{h_3}\dfrac{\partial\phi}{\partial q_3}\right)\end{array}\right\}=0 \qquad (1.1.7)$$

Ενώ το gradφ υπολογίζεται :

$$\nabla\phi = \text{grad}\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}e_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}e_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}e_3 \qquad (1.1.7α)$$

με $e_1$, $e_2$, $e_3$ το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, που συνήθως αναφέρεται στην βιβλιογραφία των φυσικών επιστημών $i = e_1 = (1, 0, 0)$, $j = e_2 = (0, 1, 0)$, $h = e_3 = (0, 0, 1)$.

Αν δε $V=V_1 e_1 + V_2 e_2 + V_3 e_3$ είναι η διανυσματική συνάρτηση, τότε ο μετασχηματισμός των div V και curl V , δες ενότητα 3.8, τόμου Ι, είναι :

$$\nabla \cdot V = \text{div}V =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 V_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 h_1 V_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 V_3)\right] \qquad (1.1.7\beta)$$

$$\nabla \times V = \text{curl}V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1 e_1 & h_2 e_2 & h_3 e_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix} \qquad (1.1.7\gamma)$$

**Παράδειγμα 1.1.2** : Έστω ότι το διάνυσμα (x, y, z) μετασχηματίζεται σε *κυλινδρικές συντεταγμένες :*

$$x = \rho \cos\theta , \quad y = \rho \sin\theta , \quad z = z \qquad (1.1.8\iota)$$

άρα $(q_1, q_2, q_3) = (\rho, \theta, z)$ . Τότε από την (1.1.6γ) εύκολα φαίνεται ότι :

$$h_1^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta + 0 = 1 , \quad h_2^2 = \rho^2 , \quad h_3^2 = 1^2$$

Οπότε η (1.1.7) μετατρέπεται στην :

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (1.1.8)$$

Στην περίπτωση αυτή είναι :

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2$$

$$dV = \rho d\rho d\theta dz$$

**Παράδειγμα 1.1.3:** Με *σφαιρικές συντεταγμένες* (ρ, ω, θ) που ορίζονται ως :

$$x = \rho\sin\theta\cos\omega, \quad y = \rho\sin\theta\sin\omega, \quad z = \rho\cos\theta \qquad (1.1.9\iota)$$

η εξίσωση Laplace είναι ( ο κοινός παράγων $1/\rho^2$ παραλήφθηκε)

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\omega^2} = 0$$

Επί πλέον : $dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2\sin^2\theta d\omega$

$$dV = 2\rho\sin^2\theta d\rho d\theta d\omega \qquad (1.1.9)$$

**Παράδειγμα 1.1.4:** Με *υπερβολικές συντεταγμένες* (α, ξ, η) που ορίζονται ως :

$$x = \alpha\cosh\xi\cos\eta, \quad y = \alpha\sinh\xi\sin\eta, \quad z = z \tag{1.1.10ι}$$

η εξίσωση Laplace είναι :

$$\frac{\partial\phi^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} + \alpha^2\left(\cosh^2\xi - \cos^2\eta\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.1.10}$$

**Παράδειγμα 1.1.5:** Με *παραβολικές συντεταγμένες* (ξ, η, θ) που ορίζονται ως :

$$x = \sqrt{(\xi\eta)}\cos\theta, \quad y = \sqrt{(\xi\eta)}\sin\theta, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \tag{1.1.11ι}$$

η εξίσωση Laplace είναι στην περίπτωση αυτή :

$$\frac{4}{\xi+\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right) + \frac{4}{\xi+\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \tag{1.1.11}$$

**Παράδειγμα 1.1.6:** Αντιμετωπίζεται πλήρως η πιο κάτω περίπτωση *πολικών συντεταγμένων*,δες ενότητα 2.1, τόμου Ι.

Αν $x = \rho\cos\theta$ $\;y = \rho\sin\theta$ τότε

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \tag{1.1.12}$$

Πράγματι :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

Από την παραγώγιση των $x = \rho\sin\theta$ και $y = \rho\sin\theta$ ως προς x είναι:

$$1 = -\rho\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial\rho}{\partial x}$$

$$0 = \rho\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial\rho}{\partial x}$$

Άρα : $\quad \dfrac{\partial\rho}{\partial x} = \cos\theta \qquad \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\sin\theta$

Όμοια παραγωγίζοντας ως προς $y$ είναι :

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin\theta \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\cos\theta$$

Όποτε υπολογίζονται ότι :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial \phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\cos\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \sin \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cos\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

Από τις σχέσεις αυτές υπολογίζεται εύκολα τότε ότι :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\phi}{dx}\right) =$$

$$\cos^2\theta \frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}(2\sin\theta\cos\theta)\frac{d\phi}{d\theta} - \frac{1}{\rho}(2\sin\theta\cos\theta)\frac{d^2\phi}{d\theta d\rho} +$$

$$+\frac{1}{\rho}\sin^2\theta\frac{d\phi}{d\theta} + \frac{1}{\rho^2}\sin^2\theta\frac{d^2\phi}{d\theta^2}$$

Όμοια και $\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ (οι διπλάσιοι οροί έχουν αντίθετο πρόσημο). Όποτε προσθέτοντας η προς απόδειξη. Συγκρίνατε την (1.1.12) και (1.1.8).

**Παράδειγμα 1.1.7 :** (1) Αν $r = (x^2 + y^2 + 2^2)^{1/2}$ τότε $\nabla f(r) = \dfrac{1}{r} f^{'}(r)\bar{r}$

(2) Ποία η Laplacian της $\phi = f(r)$

(3) Μία λύση της Laplacian είναι η 1/r.

Πράγματι:

(1) $$\nabla f(r) = \frac{\partial}{\partial x} f(r)i + \frac{\partial}{\partial y} f(r)j + \frac{\partial}{\partial z} f(r)k$$

$$= f^{'}(r)\left[\frac{\partial r}{dx}i + \frac{\partial r}{dy}j + \frac{\partial r}{dz}k\right] =$$

$$= \frac{1}{r} f^{'}(r)\left[x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right] = \frac{1}{r} f'(r)\bar{r}$$

(2) $$\nabla^2\phi = \nabla(\nabla\phi) = \nabla\left\{\frac{1}{r}\right\} f^{'}(r)\bar{r} = \nabla\left\{\frac{1}{r} f^{'}{}'(r)\right\}\bar{r} + \frac{1}{r} f^{'}(r)(\nabla \bar{r}) =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{\frac{f^{'}(r)}{r}\right\}\bar{r}\cdot\bar{r} + \frac{f''(r)}{r} = \frac{rf^{''}(r) - f^{'}(r)}{r^3}\|\bar{r}\|^2 + \frac{3f^{'}(r)}{r} =$$

$$= \mathrm{f}^{''}(\mathrm{r}) + \frac{2}{\mathrm{r}}\mathrm{f}^{'}(\mathrm{r})$$

(3) Εύκολα υπολογίζεται ότι :

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

**Παράδειγμα 1.1.8** : Αν **E** παριστά το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου και το **B** το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου. Τότε υπακούουν στις γνωστές **εξισώσεις του Maxwell**, δηλαδή :

$$\nabla\cdot\mathrm{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla\cdot\mathrm{B} = 0$$

$$\nabla\times\mathrm{E} = -\frac{\partial\mathrm{B}}{\partial\mathrm{t}}, \quad \nabla\times\mathrm{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial\mathrm{t}} + \mu_0\mathrm{j}$$

με c την ταχύτητα του φωτός, ρ την πυκνότητα, $\varepsilon_0$ και $\mu_0$ θεμελιώδεις σταθερές.

Σημείωση: Ο Σκότος φυσικός James Clarck Maxwell (1831- 1879) οδηγήθηκε στο συμπέρασμα ότι το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο. Ο Maxwell δημοσί-ευσε το πρώτο του άρθρο στην Royal Society του Edinburgh, όταν ακόμη ήταν στο σχολείο.

## 1.2 Η συνάρτηση δ του Dirac

Σε πολλές περιπτώσεις στην Φυσική κυρίως , υπάρχουν φαινόμενα με μη μηδενι-κές τιμές, σε πολύ μικρά διαστήματα, οπότε η λεγομένη συνάρτηση δ του Dirac, που χρησιμοποιείται κατά κόρον στην κβαντομηχανική, έρχεται να καλύψει αυτό το φυσικό πρόβλημα.

Θεωρούμε την συνάρτηση :

$$\delta(\alpha;\mathrm{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\alpha} & , \ |\mathrm{x}| < \alpha \\ 0 & , \ |\mathrm{x}| > \alpha \end{cases} \tag{1.2.1}$$

τότε : $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha; x)dx = 1 \qquad (1.2.2)$$

Από το **Θεώρημα της Μέσης Τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού**, για κάθε συνάρτηση f(x) ολοκληρώσιμη στο διάστημα (-α, α) είναι :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(\alpha;x)dx = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = f(\theta a), |\theta| \leq 1$$

Αν ορισθεί $\delta(x)=\lim_{a\to 0}\delta(\alpha;x)$ τότε : (1.2.3)

Η συνάρτηση ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\delta(x)=0 \ , \quad \text{αν} \quad x \neq 0 \qquad (1.2.3\alpha)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1 \qquad (1.2.3\beta)$$

**Ορισμός 1.2.1 :** Η «συνάρτηση» δ ως ανωτέρω είναι γνωστή ως συνάρτηση δ του Dirac.

Η «συνάρτηση» δ, αν και περίεργα ορισμένη, προσφέρεται προς εφαρμογή στα θέματα φυσικής, γι' αυτό και ο Dirac την ονόμασε «μη γνήσια συνάρτηση».

Σημειώνεται ότι οι μεταβολές της δ(x) κοντά στο μηδέν, δεν είναι σημαντικές αν υποτεθεί ότι δεν είναι και πολύ απότομες (έντονες). Η συνάρτηση :

$$\delta(x)=\lim_{\eta\to\infty}\frac{\sin(2\pi\eta\chi)}{\pi(\eta x)} \qquad (1.2.4)$$

πληροί τις συνθήκες (1.2.3α), (1.2.3β) και συμπεριφέρεται όπως η (1.2.3). Από την (1.2.1α) είναι :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \qquad (1.2.5)$$

ή γενικότερα :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-\alpha)dx = f(a) \qquad (1.2.5\alpha)$$

Η (1.2.5α) αποδεικνύει ότι το «πολύπλοκο» ολοκλήρωμα στο δεξί μέρος της (1.2.5α) είναι ίσο, με την τιμή της συνάρτησης στη θέση α. Εύκολα αποδεικνύεται ότι :

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad \delta(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}\,\delta(x)$$

$$\delta(\lambda^2 - x^2) = \frac{1}{2\lambda}\left\{\delta(x-\lambda) + \delta(x+\lambda)\right\}, \quad \lambda>0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta^{(\eta)}(x)dx = (-1)^{\eta} f^{(\eta)}(0).$$

## 1.3 Η συνάρτηση του Heaviside

Σε πολλές περιπτώσεις αναφέρεται ότι η συνάρτηση δ(x) είναι η παράγωγος της μοναδιαίας συνάρτησης του Oliver Heaviside (1850-1925).

**Ορισμός 1.3.1** : Η μοναδιαία συνάρτηση του Heaviside H(x) ορίζεται ως:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Για κάθε ολοκληρωμένη συνάρτηση f(x) είναι :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dH(x) = f(0) \tag{1.3.2}$$

Συγκρίνοντας την (1. 3. 2) με την (1. 2. 5) φαίνεται η σχέση μεταξύ H(x) και δ(x). Από αυτές τις δύο εξισώσεις φαίνεται ότι η δ(x) δεν είναι συνάρτηση, μα ένα μέτρο – Stieltjes. Ως εκ τούτου η χρησιμοποίηση της δ(x) συνάρτησης Dirac, θα μπορούσε να αποφευχθεί με την συστηματική χρήση του ολοκληρώματος κατά Stieltjes που, ο Αναγνώστης θα συνάντηση στο κεφάλαιο 2.

## 1.4 Οι συναρτήσεις Β, Γ και δίγαμμα. Η σταθερά γ.

Παρακάτω ορίζονται δύο πολύ σημαντικές κατηγορίες συναρτήσεων, οι συναρτήσεις Γ και Β. Οι συναρτήσεις αυτές χρησιμοποιούνται τόσο στην Στατιστική, όσο και στα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Ορίζεται πρώτα η Γ, που εξαρτάται από μια παράμετρο, p και κατόπιν η Β, που εξαρτάται από δυο παραμέτρους, p και q.

**Ορισμός 1.4.1:** Το παρακάτω ολοκλήρωμα ορίζει την συνάρτηση Γ με παράμετρο p :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^x x^{p-1} dx \qquad (1.4.1)$$

Σημειώνεται ότι το ολοκλήρωμα Γ(p) συγκλίνει με $p > 0$.

**Πρόταση 1.4.1 :** Για τη συνάρτηση Γ(p) ισχύουν τα κάτωθι :

(i) $\Gamma(1) = 1$

(ii) $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$

(iii) $\Gamma(p+1) = p!, \qquad p \in N$

(iv) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(v) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2p) = 2^{2p-1}\,\Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)$

(vi) $\Gamma(p+1) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\cdot n^p}{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}, \qquad p > 0$

(vii) $\Gamma(p-r) = (-1)^r \dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+r)}, \qquad r \in Z \quad , p \in Q$

(viii) $\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+r\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}+n-r\right)}{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2} = \dfrac{1}{2^{2n}}\cdot\dfrac{(2n-2r)!\cdot(2r)!}{r!\cdot(n-r)!}$

Όταν το p είναι αρνητικό ορίζεται η συνάρτηση Γ μέσω της (ii).

**Παράδειγμα 1.4.1** Υπολογίσατε τις τιμές της συνάρτησης Γ : $\Gamma(-\frac{1}{2})$, $\Gamma(\frac{5}{2})$, $\Gamma(-\frac{5}{2})$.

Είναι : $\Gamma(-\frac{1}{2})$ = (από (ii) ) $\dfrac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}}$ = (από (iv) ) = $\dfrac{\sqrt{\pi}}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \Gamma(\frac{3}{2}+1) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{-\frac{3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi} \qquad \text{άρα} \quad \Gamma(-\frac{5}{2}) = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}\,.$$

**Παράδειγμα 1.4.2:** Υπολογίσατε το $I(k,m,n) = \int_0^\infty x^m e^{-kx^n}\,dx$, με k, m, n> 0.

Θέτοντας $kx^n = y$ υπολογίζεται ότι το ολοκλήρωμα είναι :

$$I = \int_0^\infty \left[(\frac{y}{k})^{\frac{1}{n}}\right]^m e^{-y} d\left[(\frac{y}{k})^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$= \frac{1}{nk^{\frac{(m+1)}{n}}}\int_0^\infty y^{\frac{(m+1)}{n}-1} e^{-y}dy \quad = \frac{1}{nk^{\frac{(m+1)}{n}}}\Gamma(\frac{m+n}{n})$$

Εφαρμογή : I (2,3,5) = ;

**Ορισμός 1.4.2:** Το παρακάτω ολοκλήρωμα ορίζει την συνάρτηση Β με παραμέτρους p και q.

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad (1.4.2)$$

**Πρόταση 1.4.2:** Για τη συνάρτηση B(p,q) ισχύουν τα κάτωθι :

(i) $\mathrm{B}(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$