

Περιεχόμενα

Κατάλογος Αλγορίθμων	xviii
Κατάλογος Σχημάτων	xxi
Κατάλογος Πινάκων	xxix
1 Βασικές Έννοιες	1
1.1 Εισαγωγή	2
1.2 Κατηγορίες Γράφων	6
1.3 Ποσοτικά Στοιχεία	13
1.4 Πράξεις επί των Γράφων	17
1.4.1 Πρωτεύουσες πράξεις	17
1.4.2 Δευτερεύουσες πράξεις	18
1.5 Γράφοι και Αλγόριθμοι	25
1.6 Αποθήκευση Γράφων	27
1.6.1 Στατικές αναπαραστάσεις	27
1.6.2 Δυναμικές αναπαραστάσεις	29
1.7 Ακολουθία Βαθμών	31
1.8 Περαιτέρω Μελέτη	37
1.9 Ασκήσεις	37
2 Μονοπάτια και Αποστάσεις	41
2.1 Εισαγωγή	42
2.2 Αλγόριθμοι Διάσχισης Γράφων	43
2.2.1 Αλγόριθμος αναζήτησης κατά πλάτος - BFS	44
2.2.2 Αναζήτηση κατά βάθος - DFS	47
2.3 Εύρεση Συντομότερων Μονοπατιών	51
2.3.1 Αλγόριθμος Dijkstra	52
2.3.2 Αλγόριθμος Floyd	55
2.3.3 Αλγόριθμος Warshall	58
2.4 Αποστάσεις σε Γράφο	63
2.5 Είδη Κεντρικότητας	67
2.6 Εύρεση Χαρακτηριστικών Γράφου	72
2.7 Προβλήματα - Εφαρμογές	74
2.7.1 Τοποθέτηση υπηρεσιών	74
2.7.2 Εύρεση του μακρύτερου μονοπατιού	76
2.8 Περαιτέρω Μελέτη	77
2.9 Ασκήσεις	78

3	Κυκλώματα και Κύκλοι	81
3.1	Εισαγωγή	82
3.2	Eulerian Γράφοι	82
3.3	Αλγόριθμοι Εύρεσης Eulerian Κυκλωμάτων	85
3.4	Hamiltonian Γράφοι	88
3.5	Αλγόριθμος Εύρεσης Hamiltonian Κύκλου	96
3.6	Το Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή	98
3.7	Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι TSP	103
3.8	Μονοπάτια σε Άπειρους Γράφους	111
3.9	Μαγικά Τετράγωνα και Γράφοι	112
3.10	Προβλήματα - Εφαρμογές	118
3.10.1	Το πρόβλημα των κινήσεων αλόγων σε σκακιέρα	118
3.10.2	Το πρόβλημα τοποθέτησης προσώπων σε τραπέζι	120
3.10.3	Το πρόβλημα της στιγμιαίας παραφροσύνης	121
3.10.4	Το Πρόβλημα του Κινέζου Ταχυδρόμου	123
3.11	Περαιτέρω Μελέτη	124
3.12	Ασκήσεις	124
4	Δένδρα	127
4.1	Εισαγωγή	128
4.2	Απαρίθμηση Δένδρων	132
4.3	Ζευγνύοντα Δένδρα	136
4.4	Αλγόριθμοι Εύρεσης Ελαχίστων Δένδρων	144
4.5	Προβλήματα - Εφαρμογές	151
4.5.1	Δένδρα Steiner	151
4.5.2	Παραλλαγές ζευγνυόντων δένδρων	152
4.6	Περαιτέρω Μελέτη	153
4.7	Ασκήσεις	154
5	Συνδεσμικότητα	157
5.1	Εισαγωγή	158
5.2	Τεμάχια Γράφου	163
5.3	Ισομορφισμός	166
5.4	Αλγόριθμος Εύρεσης Τεμαχίων	171
5.5	Το Γενικευμένο Πρόβλημα του Συνδέσμου	174
5.6	Περαιτέρω Μελέτη	178
5.7	Ασκήσεις	178
6	Επιπεδικότητα	181
6.1	Εισαγωγή	182
6.2	Θεωρήματα Euler και Kuratowski	184
6.3	Γράφοι Ενσωματώσιμοι σε Άλλες Επιφάνειες	191
6.4	Διαδικότητα	199
6.5	Άλλα Κριτήρια Επιπεδικότητας	202
6.6	Αλγόριθμος Εύρεσης Επιπεδικότητας	205
6.7	Προβλήματα - Εφαρμογές	211
6.7.1	Το πρόβλημα των διασταυρώσεων σε ολοκληρωμένα	211
6.7.2	Hamiltonian Επίπεδοι Γράφοι	212
6.8	Περαιτέρω Μελέτη	214
6.9	Ασκήσεις	215

7	Χρωματισμός	217
7.1	Εισαγωγή	218
7.2	Χρωματισμός Κορυφών	222
7.3	Χρωματισμός Χαρτών	227
7.4	Χρωματισμός Ακμών	229
7.5	Χρωματικά Πολυώνυμα	234
7.6	Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι Χρωματισμού	238
7.7	Προβλήματα - Εφαρμογές	243
7.7.1	Το πρόβλημα της κατάρτισης ωρολογίου προγράμματος	243
7.7.2	Το πρόβλημα της ασφάλειας υπολογιστή	243
7.7.3	Το πρόβλημα της ανάθεσης καταχωρητών	244
7.7.4	Το πρόβλημα της αποθήκευσης ασύμβατων προϊόντων	244
7.7.5	Το πρόβλημα του χρωματισμού από λίστα	245
7.7.6	Το πρόβλημα του χρωματισμού με δύο χρώματα	246
7.7.7	Το πρόβλημα των αυτοκρατοριών	246
7.7.8	Ο Γρίφος Sudoku	247
7.8	Περαιτέρω Μελέτη	249
7.9	Ασκήσεις	249
8	Κατευθυνόμενοι Γράφοι	251
8.1	Εισαγωγή	252
8.2	Γράφοι Τουρνουά	255
8.3	Κατευθυνόμενα Μονοπάτια και Κύκλοι	259
8.4	Αλγόριθμος Αναζήτησης κατά Βάθος - DFS	263
8.5	Αλγόριθμος Τοπολογικής Ταξινόμησης	266
8.6	Αλγόριθμος Εύρεσης Ισχυρά Συνδεδεμένων Συνιστωσών	268
8.7	Το Πρόβλημα του Λαβύρινθου	273
8.8	Μαρκοβιανές Αλυσίδες	276
8.9	Προβλήματα - Εφαρμογές	280
8.9.1	Το πρόβλημα της κατάταξης αθλητών σε τουρνουά	280
8.9.2	Το πρόβλημα της αλληλουχίας εργασιών	282
8.9.3	Το πρόβλημα του σχεδιασμού τηλε-εκτυπωτή	283
8.9.4	Το πρόβλημα του μαγνητικού τύμπανου	286
8.9.5	Το πρόβλημα της μονοδρόμησης	287
8.10	Περαιτέρω Μελέτη	288
8.11	Ασκήσεις	288
9	Δίκτυα και Ροές	291
9.1	Εισαγωγή	292
9.2	Ροές και Τομές	295
9.3	Βασικοί Μέθοδοι Υπολογισμού Μέγιστης Ροής	302
9.3.1	Αλγόριθμος Επιγραφών	303
9.3.2	Αλγόριθμος Κλιμάκωσης Χωρητικότητας	306
9.3.3	Αλγόριθμος των Βραχύτατων Μονοπατιών (Edmonds-Karp)	309
9.3.4	Αλγόριθμος Διοχέτευσης-Αναβάθμισης	313
9.4	Μία Εφαρμογή των Ροών: Μέθοδος PERT	318
9.5	Περαιτέρω Μελέτη	324
9.6	Ασκήσεις	325
10	Αντιστοιχίσεις και Καλύμματα	329

10.1	Εισαγωγή	330
10.2	Αντιστοιχίσεις και Διμερείς Γράφοι	333
10.3	Καλύμματα και Ανεξάρτητα Σύνολα	338
10.4	Αριθμοί Ramsey	344
10.5	Μέγιστες Αντιστοιχίσεις σε Διμερείς Γράφους	348
10.6	Βέλτιστες Αντιστοιχίσεις σε Διμερείς Γράφους	353
10.7	Το Πρόβλημα του Κινέζου Ταχυδρόμου	358
10.8	Το Πρόβλημα της Επιλογής Προσωπικού	361
10.9	Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι Εύρεσης Καλυμμάτων	364
10.10	Το Πρόβλημα των Σταθερών Γάμων	367
10.11	Το Πρόβλημα του Ωρολογίου Προγράμματος	370
10.12	Προβλήματα - Εφαρμογές	373
10.12.1	Λατινικά τετράγωνα	373
10.12.2	Ελληνο-λατινικά τετράγωνα	375
10.12.3	Παράγοντες και Παραγοντοποίηση	377
10.12.4	Διπλά στοχαστικοί πίνακες	378
10.12.5	Ελαχιστοποίηση λογικών συναρτήσεων	379
10.12.6	Στερεότητα σιδηροκατασκευών	380
10.13	Περαιτέρω Μελέτη	382
10.14	Ασκήσεις	382
11	Φασματική Θεωρία Γράφων	385
11.1	Εισαγωγή	386
11.2	Έννοιες Γραμμικής Άλγεβρας	386
11.2.1	Πίνακες και Διανύσματα	386
11.2.2	Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα	388
11.3	Το Φάσμα ενός Γράφου	392
11.3.1	Κοινότυπο Φάσμα	392
11.3.2	Λαπλασιανό Φάσμα	396
11.4	Φάσμα και Ιδιότητες Γράφων	399
11.4.1	Διμερείς Γράφοι	399
11.4.2	Τακτικοί Γράφοι	400
11.4.3	Άλγεβρική Συνδεσμικότητα	403
11.5	Αλγοριθμικά Θέματα	405
11.5.1	Μέτρηση Τριγώνων	405
11.5.2	Φασματική Ομαδοποίηση	407
11.6	Περαιτέρω Μελέτη	409
11.7	Ασκήσεις	410
12	Η Πιθανοτική Μέθοδος	413
12.1	Εισαγωγή	414
12.2	Έννοιες Θεωρίας Πιθανοτήτων	414
12.2.1	Βασικοί Ορισμοί	414
12.2.2	Τυχάιες Μεταβλητές	417
12.2.3	Μέση Τιμή και Διασπορά	418
12.2.4	Χρήσιμες Αισοτικές Σχέσεις	421
12.3	Παραδείγματα Χρωματισμού	422
12.4	Βασικά Εργαλεία	426
12.4.1	Η Μέθοδος της Μέσης Τιμής	426
12.4.2	Η Μέθοδος της Μεταβολής	429

12.4.3	Η Μέθοδος της Διασποράς	431
12.4.4	Το Τοπικό Λήμμα Lovász	434
12.5	Τυχαίοι Γράφοι	438
12.6	Περαιτέρω Μελέτη	443
12.7	Ασκήσεις	444
13	Βασικά Στοιχεία Πολυπλοκότητας	447
13.1	Εισαγωγή	448
13.2	Μετασχηματισμοί και Αναγωγές	449
13.3	Κλάσεις Πολυπλοκότητας	452
13.3.1	Η Κλάση \mathcal{P}	452
13.3.2	Η Κλάση \mathcal{NP}	453
13.3.3	\mathcal{NP} -πληρότητα	454
13.3.4	Το Πρόβλημα TSP	456
13.4	\mathcal{NP} -πλήρη Προβλήματα	458
13.5	Περαιτέρω Μελέτη	464
13.6	Ασκήσεις	465

Κατάλογος Αλγορίθμων

1.1	Διαπίστωση Γραφικής Ακολουθίας	34
2.1	BFS	44
2.2	DFS	49
2.3	Αναδρομικός DFS	51
2.4	Dijkstra	54
2.5	Floyd	59
2.6	Warshall	63
2.7	Υπολογισμός Διαμέτρου	73
2.8	Υπολογισμός Κέντρου	74
2.9	Υπολογισμός Μέσου	74
2.10	Υπολογισμός Περιφέρειας	75
2.11	Εύρεση Μακρύτερου Μονοπατιού	77
3.1	Fleury	86
3.2	Hierholtzer	87
3.3	Tucker	88
3.4	Άπληστος TSP με DFS	105
3.5	Άπληστος TSP με Αμφίπλευρη Επέκταση Μονοπατιού	107
3.6	Άπληστος TSP με Πλησιέστερη Εισαγωγή	108
3.7	TSP με Ελάχιστο Ζευγνύον Δένδρο	109
3.8	TSP με Ανταλλαγές Κορυφών	110
3.9	Σιαμέζικος Αλγόριθμος Δημιουργίας Μαγικών Τετραγώνων	115
4.1	Κωδικοποίηση Prüfer	134
4.2	Αποκωδικοποίηση Prüfer	135
4.3	Kruskal	146
4.4	Prim	148
4.5	Borůvka	150
5.1	Ωμή Βία για Διαπίστωση Ισομορφικότητας	168
5.2	Εύρεση Τεμαχίων	173
5.3	Κατασκευή l -συνδεδεμένου Γράφου	177

6.1	Έλεγχος Επιπεδικότητας	209
7.1	Σειριακός Χρωματισμός	239
7.2	Brelaz	241
7.3	Χρωματισμός Διμερών Γράφων	246
8.1	Τοπολογική Ταξινόμηση με DFS	268
8.2	Άπληστη Τοπολογική Ταξινόμηση	268
8.3	Kosaraju	269
8.4	Εύρεση Ισχυρά Συνδεδεμένων Συνιστωσών	271
9.1	Ford-Fulkerson	302
9.2	Μέθοδος Επιγραφών	303
9.3	Κλιμάκωση Χωρητικότητας	307
9.4	Μέθοδος Διοχέτευσης-Αναβάθμισης	315
9.5	PERT	324
10.1	Εύρεση Μέγιστων Αντιστοιχίσεων	349
10.2	Kuhn-Munkres	356
10.3	Εύρεση Κυκλώματος Κινέζου Ταχυδρόμου	361
10.4	Εύρεση Καλύμματος Κορυφών	365
10.5	Εύρεση Καλύμματος Κορυφών με Σύνολα	368
10.6	Gale-Shapley	368
11.1	Μέτρηση Τριγώνων	408
11.2	Φασματική Ομαδοποίηση	409

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Πεπερασμένος γράφος.	2
1.2	Πολυ-γράφος, ψευδογράφος, υποκείμενος και κατευθυνόμενος γράφος.	4
1.3	Ισομορφικοί γράφοι.	5
1.4	Γράφος, υπογράφοι και επηρεασμένοι υπογράφοι.	6
1.5	1-παραγοντοποίηση του K_4 και 2-παραγοντοποίηση του K_5	6
1.6	Πλήρεις γράφοι τάξης από $n=1$ μέχρι $n=6$	7
1.7	Γράφος με $n=8$ και κλίκες με $\omega=4$	7
1.8	Τακτικοί γράφοι βαθμού $k=0,1,2,3,4,5$ και τάξης $n=6$	8
1.9	Πλατωνικοί τακτικοί γράφοι.	8
1.10	Κυκλικοί γράφοι C_3, C_4 και C_5	9
1.11	Υπερκύβοι Q_1, Q_2 και Q_3	9
1.12	Γράφοι μονοπάτια P_2 και P_4	9
1.13	Μπουκέτα B_2, B_4 και δίπολα D_3, D_4	10
1.14	Απλός γράφος και αντίστοιχος γραμμικός.	10
1.15	Πλήρεις διμερείς γράφοι $K_{3,4}, K_{2,2}$ και $K_{1,5}$	11
1.16	Πλήρεις πολυμερείς γράφοι $K_{1,1,1,1}, K_{1,2,2}$ και $K_{2,2,2}$	11
1.17	Απεικονίσεις $(5,3)$ -, $(6,3)$ - και $(8,3)$ -κλωβών.	12
1.18	Διαγραφή κορυφής και διαγραφή ακμής.	17
1.19	Γράφος με 2 αποκόπτουσες κορυφές και 1 αποκόπτουσα ακμή.	18
1.20	Ένωση, τομή και άθροισμα δακτυλίου γράφων.	19
1.21	Άθροισμα γράφων και τροχοειδής γράφος W_6	20
1.22	Καρτεσιανό και λεξικογραφικό γινόμενο γράφων.	20
1.23	Αμαλγαματοποίηση του P_3 και P_4	21
1.24	Αμαλγαματοποίηση υπογράφου.	21
1.25	Γράφος και συμπλήρωμά του.	22
1.26	Ανταλλαγή ακμών.	23
1.27	Διάσπαση κορυφών.	23
1.28	Συγχώνευση κορυφών v_1 και v_2	24
1.29	Υποδιαίρεση ακμών του $K_{3,3}$	24

1.30	Αυτο-αμαλγαματοποίηση γράφου.	25
1.31	Γράφος G και τετράγωνο G^2	25
1.32	Γράφος προς αναπαράσταση.	28
1.33	Πίνακες γειτνίασης και προσπτώσεων γράφου του Σχήματος 1.32.	29
1.34	Κατευθυνόμενος γράφος προς αναπαράσταση.	30
1.35	Γραμμικός πίνακας γράφου του Σχήματος 1.34.	30
1.36	Γραμμική συνδεδεμένη λίστα γράφου του Σχήματος 1.34.	30
1.37	Αγνή συνδεδεμένη δομή γράφου του Σχήματος 1.34.	31
1.38	Γράφοι με ίδια ακολουθία βαθμών.	32
1.39	Κατασκευή γράφου από ακολουθία βαθμών.	35
1.40	Κατασκευή ψευδογράφου από ακολουθία βαθμών.	36
2.1	Περίπατος $(v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_5, v_2, e_2, v_3)$, ίχνος $(v_2, e_5, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_6, v_5)$ και μονοπάτι $(v_2, e_5, v_4, e_4, v_5)$	42
2.2	Εφαρμογή αλγορίθμου BFS.	45
2.3	Αναπαράσταση γράφου με γραμμικούς πίνακες.	46
2.4	Εφαρμογή αλγορίθμου DFS.	50
2.5	Εύρεση μονοπατιών με αλγόριθμο Dijkstra.	53
2.6	Πίνακας γειτνίασης γράφου του Σχήματος 2.5.	57
2.7	Εφαρμογή αλγορίθμου Floyd.	58
2.8	Συνδεδεμένος γράφος, πίνακας γειτνίασης και τετράγωνό του.	59
2.9	Δυνάμεις G^3, G^4, G^5 γράφου του Σχήματος 2.8.	60
2.10	Δυνάμεις γράφου Σχήματος 2.8 με λογικό πολλαπλασιασμό.	61
2.11	Πίνακας προσεγγισιμότητας γράφου του Σχήματος 2.8.	62
2.12	Κέντρο γράφου.	65
2.13	Γράφος και εκκεντρικότητες κορυφών.	65
2.14	Εκκεντρικότητες και αποστάσεις κορυφών ζυγισμένου γράφου.	66
2.15	Κέντρο και μέσο γράφου.	67
2.16	Κεντρικότητα βαθμού.	68
3.1	Γέφυρες του Königsberg και αντίστοιχος πολυ-γράφος.	83
3.2	Μη Eulerian, μη ημι-Eulerian, ημι-Eulerian και Eulerian γράφοι.	83
3.3	Εφαρμογή κατασκευής Eulerian κυκλώματος και ανοικτού ίχνους.	84
3.4	Αυθαίρετα και μη εξιχνιάσιμοι γράφοι.	86
3.5	Δωδεκάεδρο και Hamiltonian κύκλος αντίστοιχου γράφου.	89
3.6	Γράφος με 2-παράγοντα που δεν είναι Hamiltonian κύκλος.	90
3.7	Ομογενώς εξιχνιάσιμος μη υπο-Hamiltonian γράφος.	90
3.8	Γράφος Θεωρήματος 3.6.	91
3.9	Εφαρμογή κατασκευής κλειστότητας γράφου.	95
3.10	Κατευθυνόμενος γράφος με $n=5$ κορυφές.	96

3.11	Πίνακες M_1 και M γράφου του Σχήματος 3.10.	97
3.12	Πίνακες M_2, M_3, M_4 γράφου του Σχήματος 3.10.	98
3.13	Ευκλείδειος ζυγισμένος γράφος.	100
3.14	Εφαρμογή αλγορίθμου με διακλάδωση και περιορισμό.	101
3.15	Κάτω όριο βάρους Hamiltonian κύκλου του γράφου του Σχήματος 3.13.	104
3.16	Ελάχιστο ζευγνύον δένδρο του γράφου του Σχήματος 3.13.	109
3.17	Διαδοχικές ανταλλαγές ακμών στο γράφο του Σχήματος 3.13.	110
3.18	Άπειρος γράφος.	111
3.19	Hamiltonian μονοπάτια.	111
3.20	Eulerian μονοπάτια.	112
3.21	Βασικό μαγικό τετράγωνο και σχηματισμός παράγωγου.	113
3.22	Εφαρμογή μεθόδου Bachet.	114
3.23	Παραγωγή μαγικού τετραγώνου.	115
3.24	Μαγικοί γράφοι $K_{3,3}$ και $K_{4,4}$	116
3.25	Αντιμαγικά τετράγωνα.	116
3.26	Αντιμαγικοί γράφοι.	117
3.27	Παραλλαγές μαγικών τετραγώνων.	117
3.28	Μέθοδος De Moivre και Hamiltonian μονοπάτι.	119
3.29	Πρώτη μέθοδος Euler και Hamiltonian κύκλος.	119
3.30	Δεύτερη μέθοδος Euler και Hamiltonian κύκλος.	119
3.31	Τοποθέτηση προσώπων σε τραπέζι.	120
3.32	Τέσσερις χρωματισμένοι κύβοι.	121
3.33	Γράφοι αντίστοιχοι των κύβων του Σχήματος 3.32.	122
3.34	Ένωση γράφων του Σχήματος 3.33.	122
3.35	Κύκλοι ανεξάρτητοι ως προς τις ακμές και τελική σύνθεση.	122
4.1	Γράφος και δένδρα με ίδια ακολουθία βαθμών.	129
4.2	Δένδρο-κάμπια.	130
4.3	Εκκεντρικότητες σε δένδρο-ασταχό.	131
4.4	16 διακριτά δένδρα με επιγραφές που έχουν $n=4$ κορυφές.	133
4.5	Κωδικοποίηση Prüfer.	134
4.6	n -βουτάνιο και ισο-βουτάνιο.	136
4.7	Εύρεση ελάχιστου αριθμού χορδών.	137
4.8	Εφαρμογή Θεωρήματος 4.14.	138
4.9	Εφαρμογή Θεωρήματος 4.15.	139
4.10	Γράφος και πίνακες γειτνίασης A , βαθμών D , εισόδου L και ελάσσων D_{11}	141
4.11	Γράφος, ζευγνύον δένδρο και σύνολο θεμελιωδών κυκλωμάτων.	142
4.12	Εισαγωγή χορδής σε ζευγνύον δένδρο και νέα ζευγνύοντα δένδρα.	142

4.13	Ζευγνύοντα δένδρα γράφου Σχήματος 4.10 και δενδρικός γράφος.	143
4.14	Γράφος για εφαρμογή αλγορίθμων.	146
4.15	Εφαρμογή αλγορίθμου Kruskal.	147
4.16	Εφαρμογή αλγορίθμου Prim.	149
4.17	Εφαρμογή αλγορίθμου Borůvka.	150
4.18	Ζευγνύον δένδρο και δένδρο Steiner.	152
5.1	Συνδεδεμένοι γράφοι.	158
5.2	Γράφος με $VC(G)=2$, $EC(G)=3$, $d(G)=4$.	161
5.3	Εφαρμογή Θεωρήματος 5.7.	164
5.4	Εφαρμογή Πορίσματος 5.4.	165
5.5	Γράφος με τρεις αποκόπτουσες κορυφές και πέντε τεμάχια.	168
5.6	Γράφος 1-ισομορφικός προς το γράφο του Σχήματος 5.5.	169
5.7	Διαδικασία παραγωγής 2-ισομορφικών γράφων.	170
5.8	2-ισομορφικοί γράφοι.	171
5.9	Γράφος με 2 συνιστώσες και αντίστοιχο δάσος.	172
5.10	Γράφος και αντίστοιχο δένδρο για εύρεση τεμαχίων.	174
5.11	Γράφοι με διαφορετική συνδεσιμότητα.	175
5.12	Γράφοι $H_{4,8}$, $H_{5,8}$ και $H_{5,9}$.	176
6.1	Γράφος ανέσεων.	182
6.2	Επιπεδική και επίπεδες μορφές γράφου K_4 .	182
6.3	Καμπύλη Jordan.	183
6.4	Εξώτερος και μέγιστος εξώτερος επιπεδικός γράφος.	184
6.5	Εφαρμογή 2ης απόδειξης Θεωρήματος 6.2.	187
6.6	Γράφος ομοιομορφικός προς τον $K_{3,3}$.	188
6.7	Γράφος Petersen και υπογράφος ομοιομορφικός προς τον $K_{3,3}$.	189
6.8	Ενσωμάτωση γράφου σε σφαίρα.	190
6.9	Αποσύνθεση K_8 σε δύο επίπεδους γράφους.	191
6.10	Γράφος K_6 με 3 διασταυρώσεις.	194
6.11	Διάσπαση κορυφής γράφου K_5 .	194
6.12	Επιπεδική διάσπαση γράφου K_8 .	195
6.13	Σαμπρέλα και ζώνη του Möbius.	196
6.14	Ενσωμάτωση σε σαμπρέλα και ζώνη του Möbius.	197
6.15	Σφαίρα με λαβή.	197
6.16	Γράφος και γεωμετρικός δυαδικός.	199
6.17	Κομμάτια με βάση κύκλο.	203
6.18	Ασύμβατα τμήματα.	204
6.19	Κύκλος και σχετικά τμήματα του K_5 .	205
6.20	Κύκλος και σχετικά τμήματα του $K_{3,3}$.	205

6.21	Απλός έλεγχος επιπεδικότητας γράφων.	206
6.22	Παραδεκτή και απαράδεκτη ενσωμάτωση.	207
6.23	Γράφος \tilde{H}_1 και τμήματά του.	208
6.24	Γράφοι \tilde{H}_2, \tilde{H}_3 και \tilde{H}_4	210
6.25	Χρήση πυλών XOR σε περίπτωση τομής.	212
6.26	Γράφος Grinberg.	214
7.1	Διαφορετικές χρωματικές τάξεις για τον ίδιο γράφο.	218
7.2	Γράφος χρωματίσιμος με μοναδικό τρόπο.	219
7.3	4-κρίσιμοι γράφοι: τροχοειδής W_6 και γράφος του Grötzsch.	219
7.4	Τέλειος γράφος.	220
7.5	Εφαρμογή Θεωρήματος 7.5.	224
7.6	Χρωματισμός περιοχών χάρτη.	228
7.7	Γράφος 3-χρωματίσιμος ως προς τις περιοχές.	229
7.8	Εφαρμογή Θεωρήματος 7.13.	230
7.9	Εφαρμογή Θεωρήματος 7.14.	231
7.10	Εφαρμογή Θεωρήματος 7.16.	233
7.11	Γράφος με χρωματικό πολυώνυμο $P_G(k)=k(k-1)^2$	234
7.12	Εφαρμογή Θεωρήματος 7.17.	235
7.13	Εύρεση χρωματικού πολυωνύμου με βάση τη Σχέση 7.1.	237
7.14	Εύρεση χρωματικού πολυωνύμου με βάση τη Σχέση 7.2.	237
7.15	Εφαρμογή αλγορίθμων χρωματισμού.	242
7.16	Συμμετρικός χάρτης Kim.	247
7.17	Έγγυρη λύση Sudoku.	248
8.1	Απλός ασυμμετρικός, συμμετρικός, υποκείμενος και αντίστροφος κατευθυνόμενος γράφος.	253
8.2	Μονόπλευρα και ισχυρά κατευθυνόμενος γράφος.	254
8.3	Προσανατολισίμος γράφος Θεωρήματος 8.1.	254
8.4	Γράφος-τουρνουά με $n=6$ κορυφές.	256
8.5	Γράφοι-τουρνουά με $n=3$ και $n=4$	257
8.6	Περιπτώσεις Θεωρήματος 8.10.	261
8.7	Περιπτώσεις Θεωρήματος 8.11.	262
8.8	Κατευθυνόμενος γράφος.	264
8.9	Κατευθυνόμενος γράφος και δάσος DFS.	265
8.10	DAG και δάσος DFS.	267
8.11	Τοπολογική ταξινόμηση γράφου του Σχήματος 8.10(α).	267
8.12	Εφαρμογή αλγορίθμου εύρεσης ισχυρά συνδεδεμένων συνιστωσών.	272
8.13	Συμπύκνωση D^* κατευθυνόμενου γράφου του Σχήματος 8.12.	273
8.14	Λαβύρινθος του Γουλιέλμου του 3ου και αντίστοιχος γράφος.	275

8.15	Αναπαράσταση του προβλήματος του μέθουςου.	277
8.16	Γράφος και πίνακας μετάβασης του Σχήματος 8.15.	277
8.17	Γράφος-τουρνουά με αποτελέσματα αγώνων.	280
8.18	Αλληλουχία εργασιών.	282
8.19	Σχεδιασμός τηλε-εκτυπωτή με $r=4$	284
8.20	Κατευθυνόμενος γράφος και αντίστοιχοι πίνακες A και M	285
8.21	Γράφος de Bruijn $D_{3,2}$ και αντίστοιχοι πίνακες A και M	286
8.22	Μαγνητικό τύμπανο και κυκλική ακολουθία de Bruijn.	286
8.23	Προσανατολισμός οδικού συστήματος.	287
9.1	Δίκτυο με πηγή s , δεξαμενή t και 4 ενδιάμεσες κορυφές.	292
9.2	Ροή σε δίκτυο D και αντίστοιχο δίκτυο υπολοίπων D_R	295
9.3	Αύξηση ροής κατά 1 στο μονοπάτι s, v_1, v_2, v_4, t	298
9.4	Δίκτυο D και αντίστοιχο δίκτυο υπολοίπων D_R με μέγιστη ροή.	300
9.5	Εφαρμογή του αλγόριθμου επιγραφών στο δίκτυο υπολοίπων του Σχήματος 9.2.	304
9.6	Μία κακή περίπτωση για τον αλγόριθμο επιγραφών.	306
9.7	Εφαρμογή του αλγορίθμου κλιμάκωσης χωρητικότητας σε ένα δίκτυο D	308
9.8	Εφαρμογή του αλγορίθμου Edmonds-Karp.	310
9.9	Εφαρμογή του αλγορίθμου διασκέυσης-αναβάθμισης.	319
9.10	Δίκτυο εργασιών.	320
9.11	Εφαρμογή της διαδικασίας PERT.	322
10.1	Μέγιστες αντιστοιχίσεις γράφου.	330
10.2	Αυξανόμενο μονοπάτι.	331
10.3	Γράφοι για υπολογισμό ελλείμματος.	337
10.4	Γράφος με δύο ελάχιστα καλύμματα κορυφών.	339
10.5	Γράφος με δύο ελάχιστα καλύμματα ακμών.	339
10.6	Κατασκευή δικτύου N_G	343
10.7	Όρια γράφων Ramsey $r(3,3)$, $r(3,4)$ και $r(3,5)$	345
10.8	Διμερής γράφος παραδείγματος.	350
10.9	Ουγγρικό δένδρο πρώτου περάσματος.	351
10.10	Ουγγρικά δένδρα δεύτερου και τρίτου περάσματος.	352
10.11	Ανάπτυξη αλγορίθμου Kuhn-Munkres.	357
10.12	Διαδρομή ταχυδρόμου σε Eulerian γράφο.	359
10.13	Μη Eulerian γράφος και υπογράφος με κορυφές περιττού βαθμού.	359
10.14	Πίνακας αποστάσεων και πίνακας αντιστοιχίσεων.	360
10.15	Βέλτιστη διαδρομή ταχυδρόμου σε μη Eulerian γράφο.	360
10.16	Προτιμήσεις προσωπικού και αντίστοιχη σκακιέρα.	362

10.17	Πίνακες ακαταλληλότητας.	362
10.18	Πίνακες ακαταλληλότητας.	364
10.19	Κάλυμμα κορυφών.	366
10.20	Κάλυμμα κορυφών με σύνολα.	367
10.21	Προτιμήσεις ανδρών και γυναικών.	369
10.22	Εφαρμογή αλγορίθμου Gale-Shapley.	370
10.23	Δεδομένα και αντίστοιχο ωρολόγιο πρόγραμμα.	372
10.24	Διμερής γράφος και υπογράφος από δύο αντιστοιχίσεις.	372
10.25	Νέος διμερής γράφος και τελικό ωρολόγιο πρόγραμμα.	372
10.26	Λατινικό τετράγωνο τάξης $n=5$	373
10.27	Λατινικό τετράγωνο και αντίστοιχη σκακιέρα.	374
10.28	Λατινικό παραλληλόγραμμο 3×4	375
10.29	Ορθογωνικά λατινικά τετράγωνα και ελληνο-λατινικό τετράγωνο.	375
10.30	Μη ορθογωνικά λατινικά τετράγωνα 2×2	376
10.31	Αναπαράσταση λογικής συνάρτησης με γράφο και κάλυμμα.	379
10.32	Μη στερεή και στερεή κατασκευή.	380
10.33	Μη στερεό και στερεό πλέγμα.	381
10.34	Διάταξη οριζοντίων και καθέτων γραμμών στο πλέγμα.	381
10.35	Διμερείς γράφοι για μη στερεό και στερεό πλέγμα.	382
11.1	Απλός γράφος και πίνακας γειτνίασης.	393
11.2	Συνφασματικοί γράφοι.	395
11.3	Γράφοι με δύο συνεκτικές συνιστώσες.	398
11.4	Διμερείς γράφοι.	400
11.5	Γράφοι Παραδείγματος 11.14.	406
13.1	Ο αλγόριθμος για το πρόβλημα Π_1 μέσω αναγωγής στο πρόβλημα Π_2	451
13.2	Γράφος για την Άσκηση 13.4.	466

Κατάλογος Πινάκων

1.1	Γνωστοί κλωβοί: πλήθος κορυφών για δεδομένα r και g	12
1.2	Δυαδικές πράξεις.	22
1.3	Μοναδιαίες πράξεις.	26
2.1	Τιμές ακτίνας και διαμέτρου για σημαντικούς γράφους.	66
2.2	Τιμές κεντρικότητας για παραδείγματα γράφων.	72
3.1	Επίλυση TSP.	103
3.2	Επίλυση μεγαλύτερων προβλημάτων TSP.	103
3.3	Κύκλοι Παραδείγματος 3.4.	105
3.4	Κύκλοι Παραδείγματος 3.5.	106
3.5	Κύκλοι Παραδείγματος 3.6.	107
5.1	Συνδεσιμότητα ακμών και κορυφών για σημαντικούς γράφους.	163
7.1	Τιμές χρωματικού αριθμού για σημαντικούς γράφους.	226
7.2	Τιμές χρωματικού καταλόγου για σημαντικούς γράφους.	233
7.3	Χρωματικά πολυώνυμα για σημαντικούς γράφους.	238
10.1	Υπολογισμός ελλείμματος για το γράφο του Σχήματος 10.3(α).	337