1

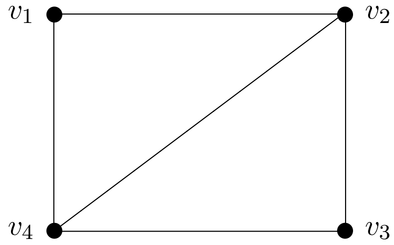
Βασικές Έννοιες

Περιεχόμενα Κεφαλαίου

1.1 Εισαγωγή

Πολλά πρακτικά προβλήματα και καταστάσεις της καθημερινής ζωής μπορούν να περιγραφούν με τη βοήθεια ενός διαγράμματος αποτελούμενου από ένα σύνολο σημείων και ένα σύνολο γραμμών που ενώνουν συγκεκριμένα ζεύγη σημείων. Για παράδειγμα, κάλλιστα θα μπορούσαν τα σημεία να αντιπροσωπεύουν πρόσωπα και οι γραμμές ζεύγη φίλων, ή τα σημεία να αντιπροσωπεύουν υπολογιστές και οι γραμμές τις αντίστοιχες καλωδιώσεις, ή τα σημεία να αντιπροσωπεύουν ηλεκτρικά στοιχεία (αντιστάσεις, πυκνωτές κλπ) και οι γραμμές τις συνδέσεις τους, ή τέλος θα μπορούσαν τα σημεία να συμβολίζουν πόλεις και οι γραμμές το οδικό δίκτυο. Η μαθηματική αφαίρεση καταστάσεων και προβλημάτων τέτοιου είδους οδηγεί στην έννοια του γράφου.

Γράφος ή *γράφημα* (graph) είναι μία δομή που αποτελείται από ένα σύνολο *κορυφών* (vertices) ή *κόμβων* (nodes) ή *σημείων* (points) που συνδέονται μεταξύ τους με ένα σύνολο *ακμών* (edges) ή *γραμμών* (lines). Γενικώς, ένας γράφος συμβολίζεται ως $G(V,E)$ ή $G{=}(V,E)$ ή $(V(G),E(G))$, όπου V και E είναι τα σύνολα των κορυφών και των ακμών αντιστοίχως. Το πλήθος των κορυφών (αντιστοίχως, των ακμών) ενός γράφου συμβολίζεται με $n{=}|V|$ (αντιστοίχως, με $m{=}|E|$) και ονομάζεται *τάξη* (order) (αντιστοίχως, *μέγεθος* (size)) του γράφου. Αν οι αριθμοί αυτοί είναι πεπερασμένοι, τότε και ο γράφος λέγεται *πεπερασμένος* (finite) και συμβολίζεται με (n,m), αλλιώς λέγεται *άπειρος* (infinite). Αν $n{=}0$ ο γράφος ονομάζεται *κενός* (empty), ενώ αν $n{=}1$ ο γράφος ονομάζεται *ασήμαντος* (trivial). Βαρύτητα έχουν οι μη ασήμαντοι γράφοι με $n > 1$. *Μηδενικός* (null) ονομάζεται ένας γράφος αν $m{=}0$ και συμβολίζεται με N_n (όπου βέβαια η μεταβλητή $n > 0$ δηλώνει το πλήθος των κορυφών). Στο Σχήμα 1.1 παρουσιάζεται ένας πεπερασμένος γράφος G με τάξη $n{=}4$ και μέγεθος $m{=}5$. Το σύνολο των κορυφών είναι $V(G){=}\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ και το σύνολο των ακμών είναι $E(G) = \{(v_1,v_2),\ (v_1,v_4),\ (v_2,v_3),\ (v_2,v_4),\ (v_3,v_4)\}$.



Σχήμα 1.1: *Πεπερασμένος γράφος.*

Κάθε ακμή προσδιορίζεται από δύο κορυφές που ονομάζονται *τερματικά σημεία* (end points). Αν η ακμή e έχει τα u, v ως τερματικά σημεία, τότε η e ονομάζεται *προσπίπτουσα* (incident) στα σημεία u, v ή λέγεται ότι η e *ενώνει* (joins) τα u, v. Ακόμη, ας σημειωθεί ότι η ακμή e συμβολίζεται με (u, v) ή (v, u). Αντιστοίχως, ορίζεται ότι το σημείο u είναι *γειτονικό* (adjacent) του v, και αντιστρόφως. Στην αντίθετη περίπτωση, αν δηλαδή δύο σημεία δεν ενώνονται, τότε ονομάζονται *μη γειτονικά* ή *ανεξάρτητα* (independent).

Η *γειτονιά* (neighborhood) μίας κορυφής v, $N(v)$, είναι το σύνολο των κορυφών που ορίζεται από τη σχέση:

$$N(v) \; = \; \{u \in V(G) | (v, u) \in E(G)\}$$

Βαθμός (degree) ή *σθένος* (valency) μίας κορυφής v λέγεται το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν στην κορυφή v και συμβολίζεται με $d(v)$. Δηλαδή ισχύει: $d(v)$=$|N(v)|$. Με $d(G)$ (αντιστοίχως, $D(G)$) συμβολίζεται ο ελάχιστος (αντιστοίχως, ο μέγιστος) βαθμός των κορυφών του γράφου G. Στο γράφο του Σχήματος 1.1 ισχύει: $d(G)$=2, $D(G)$=3. Αν για κάποια κορυφή ισχύει $d(v)$=0 ή $d(v)$=1, η κορυφή ονομάζεται *απομονωμένη* (isolated) ή *εκκρεμής* (pendant) αντιστοίχως.

Έστω ότι το σύνολο των κορυφών $V(G)$ αποτελείται από l ανεξάρτητα μεταξύ τους υποσύνολα $V_1, V_2, \ldots, V_l$, ενώ δύο κορυφές u και v ενώνονται μόνο αν ανήκουν στο ίδιο υποσύνολο. Στην περίπτωση αυτή, οι υπογράφοι $G(V_1), G(V_2), \ldots, G(V_l)$ ονομάζονται *συνδεδεμένες* ή *συνεκτικές συνιστώσες* (connected components). Ένας γράφος ονομάζεται *συνδεδεμένος* ή *συνεκτικός* (connected) αν έχει μόνο μία συνδεδεμένη συνιστώσα. Ένας γράφος λέγεται *συνδεδεμένος κατά ελάχιστο τρόπο* (minimally connected) αν η διαγραφή μίας μόνο ακμής τον αποσυνδέει και δημιουργεί συνιστώσες. Η *σειρά* (rank) ενός γράφου συμβολίζεται με r και ισούται με τη διαφορά της τάξης του μείον το πλήθος των συνιστωσών του γράφου. Δηλαδή, ισχύει η σχέση:

$$r \; = \; n - k$$

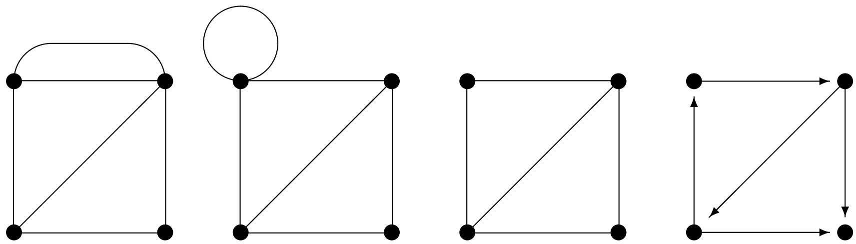
Η *μηδενικότητα* (nullity) ή *κυκλωματικός αριθμός* (cyclomatic number) ενός γράφου συμβολίζεται με μ και ισούται με τη διαφορά του μεγέθους του μείον τη σειρά του γράφου. Ισχύει δηλαδή:

$$\mu \; = \; m - n + k$$

Προφανώς για ένα συνδεδεμένο γράφο ισχύει:

$$r \; = \; n - 1 \quad \text{και} \quad \mu \; = \; m - n + 1$$

Μία ακμή με ταυτόσημα τερματικά σημεία ονομάζεται *βρόχος* (loop), ενώ δύο ή περισσότερες ακμές που ενώνουν το ίδιο ζεύγος κορυφών ονομάζονται *παράλληλες* (parallel). Κάθε γράφος χωρίς βρόχους ή παράλληλες ακμές ονομάζεται *απλός* (simple), ενώ οι ακμές του ονομάζονται *σύνδεσμοι* (links). Ένας γράφος με παράλληλες ακμές, αλλά χωρίς βρόχους, ονομάζεται *πολυ-γράφος* (multi-graph). Ένας γράφος που περιέχει βρόχους ονομάζεται *ψευδογράφος* (pseudograph). Αν από ένα γράφο διαγραφούν οι βρόχοι και για κάθε ζεύγος κορυφών όλες οι παράλληλες ακμές πλην μίας, τότε προκύπτει ο *υποκείμενος* (underlying) απλός γράφος. *Κατευθυνόμενος γράφος* (directed graph, digraph) ή *προσανατολισμένος* (oriented) ονομάζεται ένας γράφος $D(V, A)$ που αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο κορυφών V και ένα σύνολο A από διατεταγμένα ζεύγη κορυφών, που ονομάζονται *τόξα* (arcs). Στο Σχήμα 1.2 δίνεται παράδειγμα ενός πολυ-γράφου, ενός ψευδογράφου και του αντίστοιχου υποκείμενου γράφου, καθώς και ένα παράδειγμα κατευθυνόμενου γράφου.



Σχήμα 1.2: *Πολυ-γράφος, ψευδογράφος, υποκείμενος και κατευθυνόμενος γράφος.*

Κάθε ακμή e ενός γράφου μπορεί να χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό που ονομάζεται *βάρος* (weight) και συμβολίζεται με $w(e)$. Στην περίπτωση αυτή ο γράφος ονομάζεται *ζυγισμένος* (weighted). Το βάρος ενός γράφου ισούται με το άθροισμα των βαρών των ακμών του.

Είναι, επίσης, δυνατόν οι κορυφές ή οι ακμές ενός γράφου να χαρακτηρίζονται από ένα μοναδικό όνομα που ονομάζεται *επιγραφή* ή *ετικέτα* (label). Δύο γράφοι με πανομοιότυπη γραφική παράσταση αλλά διαφορετικές επιγραφές θεωρούνται διαφορετικοί. Δύο γράφοι G_1 και G_2 λέγονται *ισομορφικοί* (isomorphic) αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία M μεταξύ των συνόλων $V(G_1)$ και $V(G_2)$, έτσι ώστε αν οι κορυφές u και v είναι γειτονικές στο γράφο G_1, τότε και οι αντίστοιχες κορυφές $M(u)$ και $M(v)$ θα είναι γειτονικές στο γράφο G_2. Από τον ορισμό αυτό γίνεται αντιληπτό ότι δύο ισομορφικοί γράφοι μπορεί να έχουν διαφορετική μορφή και επιγραφές, αλλά έχουν τις ίδιες βασικές δομικές ιδιότητες. Για παράδειγμα, οι γράφοι του Σχήματος 1.3 είναι ισομορφικοί. Δύο γράφοι G_1 και G_2 λέγονται *ίσοι* (equal) αν $V(G_1)=V(G_2)$ και $E(G_1)=E(G_2)$. Προφανώς,

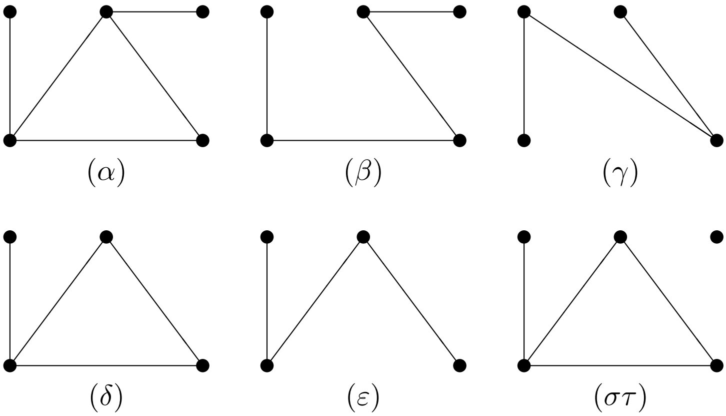
Σχήμα 1.3: *Ισομορφικοί γράφοι.*

δύο ίσοι γράφοι είναι και ισομορφικοί, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει.

Ένας γράφος H αποτελεί *υπογράφο* (subgraph) ενός άλλου γράφου G, αν ισχύει $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, και τα τερματικά σημεία οποιασδήποτε ακμής του $E(H)$ ανήκουν στο $V(H)$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο γράφος G *περιέχει* (contains) το γράφο H ή ότι είναι ένας *υπεργράφος* (supergraph) του H. Προφανώς, ο πλήρης γράφος K_n έχει n υπογράφους ισομορφικούς προς το γράφο K_{n-1}.

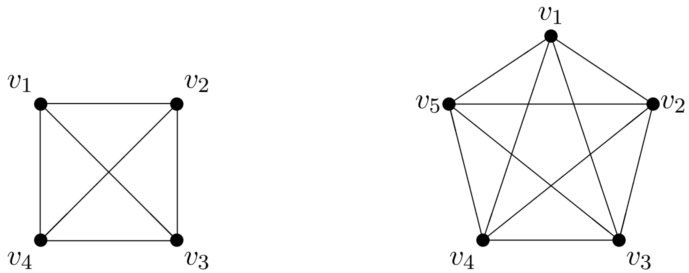
Αν ο γράφος H είναι υπογράφος του G και ισχύει $V(H){=}V(G)$, τότε ο γράφος H ονομάζεται *ζευγνύων υπογράφος* (spanning subgraph) ή *παράγοντας* (factor) του γράφου G. Αν V' είναι ένα υποσύνολο του $V(G)$, τότε ονομάζεται *επηρεασμένος από το σύνολο* V' (induced by V') ο υπογράφος , που έχει $V(){=}V'$, ενώ το σύνολο των ακμών του αποτελείται από τις ακμές του G που προσπίπτουν σε δύο κορυφές του V'. Κατά παρόμοιο τρόπο ορίζεται ένας υπογράφος H ως *επηρεασμένος από ένα σύνολο* E' (induced by E'), όπου $E' \subseteq E$, αν $E(H){=}E'$, ενώ το σύνολο των κορυφών του αποτελείται από τις κορυφές που συνδέονται από τις ακμές του E'. Στο Σχήμα 1.4(α) παρουσιάζεται ένας γράφος G, στο Σχήμα 1.4(β) ένας ζευγνύων υπογράφος, ενώ ο γράφος του Σχήματος 1.4(γ) δεν είναι υπογράφος του G. Οι υπόλοιποι γράφοι του σχήματος είναι γνήσιοι υπογράφοι του G. Έτσι, ο υπογράφος του Σχήματος 1.4(δ) μπορεί να θεωρηθεί επηρεασμένος είτε από ένα σύνολο V είτε από ένα σύνολο E, του Σχήματος 1.4(ε) δεν είναι επηρεασμένος από ένα σύνολο V, ενώ τέλος ο υπογράφος του Σχήματος 1.4(στ) δεν είναι επηρεασμένος από ένα σύνολο E.

Ειδικότερα, 1-παράγοντας ενός γράφου είναι ένα σύνολο ακμών που δεν προσπίπτουν ανά δύο στην ίδια κορυφή, και οι οποίες συνολικά προσπίπτουν προς όλες τις κορυφές του γράφου. Ο όρος 1-παραγοντοποίηση γράφου G δηλώνει ότι υπάρχει ένα σύνολο από 1-παράγοντες έτσι ώστε κάθε ακμή του G να ανήκει σε ένα και μόνο ένα 1-παράγοντα. Έτσι ο γράφος έχει παραγοντοποιηθεί σε υπογράφους που είναι ανεξάρτητοι ως προς τις ακμές, ενώ κάθε κορυφή κάθε υπογράφου είναι τερματικό σημείο 1 ακμής και μόνο. Ομοίως, η r-παραγοντοποίηση επιτυγχάνει τη διάκριση του γράφου σε υπογράφους που είναι ανεξάρτητοι ως προς



Σχήμα 1.4: *Γράφος, υπογράφοι και επηρεασμένοι υπογράφοι.*

τις ακμές, όπου κάθε κορυφή κάθε υπογράφου είναι τερματικό σημείο n ακμών ακριβώς. Ένας γράφος είναι r-*παραγοντοποιήσιμος* (r-factorable) αν αποτελείται μόνο από r-παράγοντες.



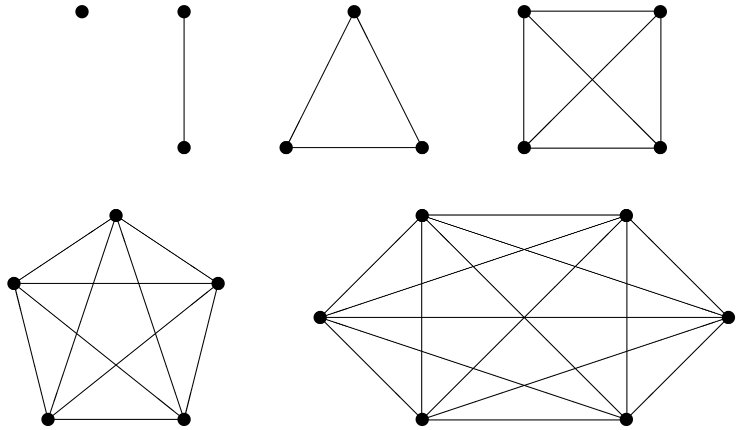
Σχήμα 1.5: *1-παραγοντοποίηση του K_4 και 2-παραγοντοποίηση του K_5.*

Στο Σχήμα 1.5 παρουσιάζεται η 1-παραγοντοποίηση του γράφου K_4 και η 2-παραγοντοποίηση του K_5. Για παράδειγμα, ο K_4 έχει τρεις 1-παράγοντες, όπου ο πρώτος περιλαμβάνει τις κατακόρυφες ακμές (v_1, v_4) και (v_2, v_3), ο δεύτερος τις οριζόντιες (v_1, v_2) και (v_3, v_4) και ο τρίτος τις διαγώνιες (v_1, v_3) και (v_2, v_4), ενώ ο K_5 έχει δύο 2-παραγοντοποιήσεις: (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_1) και (v_1, v_3), (v_3, v_5), (v_5, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_1).

1.2 Κατηγορίες Γράφων

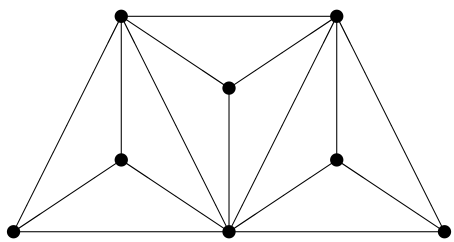
Ένας απλός γράφος, του οποίου ενώνονται δύο οποιεσδήποτε κορυφές ονομάζεται *πλήρης* (complete) ή *γενικός* (universal) και συμβολίζεται με K_n. Στο

Σχήμα 1.6 παρουσιάζονται οι πλήρεις γράφοι τάξης από n=1 μέχρι n=6. Ένας γράφος αποτελούμενος από m συνιστώσες τύπου K_n συμβολίζεται με mK_n (δες Σχήμα 1.38).



Σχήμα 1.6: *Πλήρεις γράφοι τάξης από n=1 μέχρι n=6.*

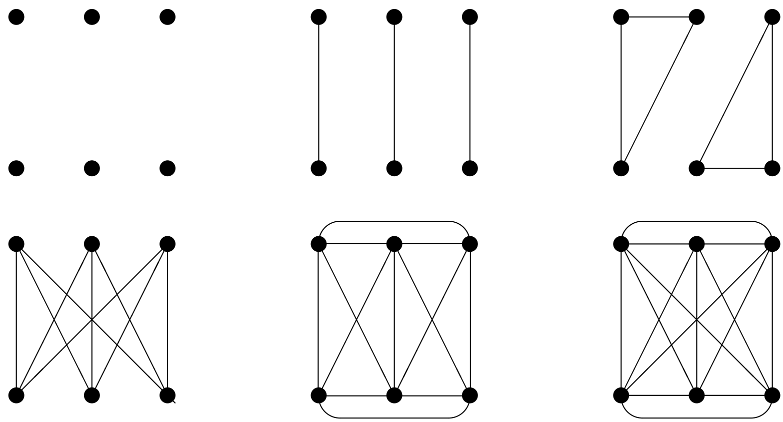
Κλίκα (clique) ενός γράφου G, είναι ένας υπογράφος H που αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών $S \subseteq V$ έτσι ώστε ο γράφος $H(S)$ να είναι πλήρης. *Αριθμός κλίκας* (clique number) καλείται η τάξη της κλίκας και συμβολίζεται με ω. Στο Σχήμα 1.7 παρουσιάζεται ένας γράφος τάξης n=8 με ω=4.



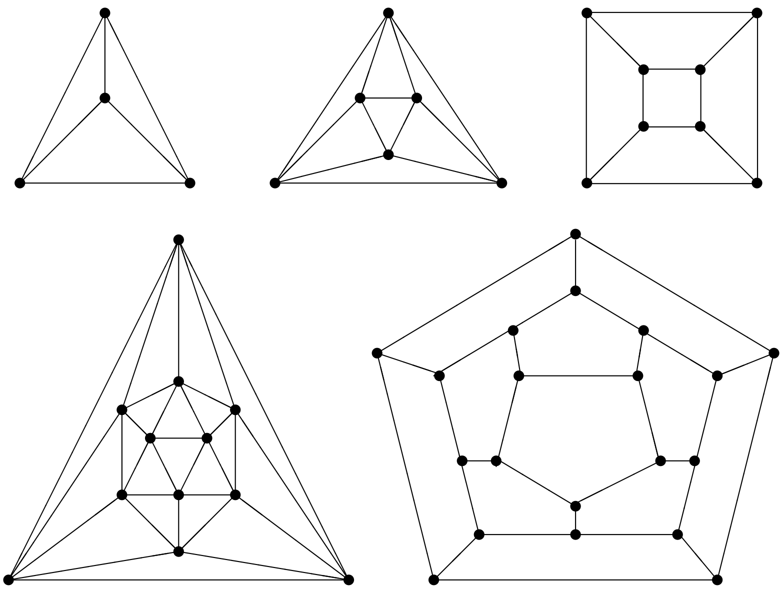
Σχήμα 1.7: *Γράφος με n=8 και κλίκες με ω=4.*

Τακτικός (regular) βαθμού k λέγεται ένας γράφος αν κάθε κορυφή του έχει τον ίδιο βαθμό k. Δηλαδή ισχύει: $d(G)$=$D(G)$=k. Προφανώς, ο K_n είναι τακτικός γράφος βαθμού $n-1$. Στο Σχήμα 1.8 παρουσιάζονται τακτικοί γράφοι τάξης n=6 και βαθμού k=0, 1, 2, 3, 4 και 5.

Ιδιαίτερη ιστορική/θεωρητική σημασία έχουν οι τακτικοί γράφοι που σχηματίζονται με τις κορυφές και τις ακμές των κανονικών στερεών: τετράεδρο, κύβος,

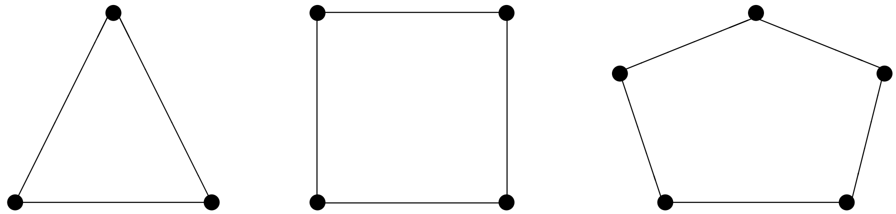


Σχήμα 1.8: *Τακτικοί γράφοι βαθμού k=0,1,2,3,4,5 και τάξης n=6.*



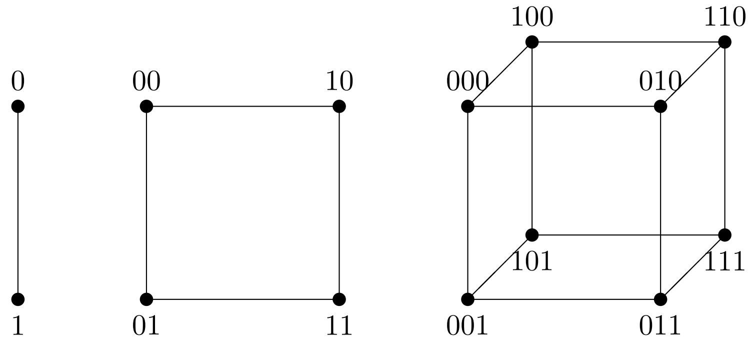
Σχήμα 1.9: *Πλατωνικοί τακτικοί γράφοι.*

οκτάεδρο, δωδεκάεδρο και εικοσάεδρο. Οι γράφοι αυτοί, που ονομάζονται *πλατωνικοί* (platonic), εμφανίζονται στο Σχήμα 1.9. Κάθε τακτικός γράφος βαθμού k=2 ονομάζεται *κυκλικός γράφος* (circuit graph) και συμβολίζεται με C_n (δες Σχήμα 1.10), ενώ κάθε τακτικός γράφος βαθμού k=3 ονομάζεται *κυβικός* (cubic). Τρεις από τους γράφους του Σχήματος 1.9 είναι κυβικοί.



Σχήμα 1.10: *Κυκλικοί γράφοι C_3, C_4 και C_5.*

Ο γράφος *υπερκύβος* (hypercube) συμβολίζεται με Q_n και είναι ένας τακτικός γράφος βαθμού n, του οποίου οι κορυφές αντιστοιχούν στο σύνολο των συμβολοσειρών που μπορούν να σχηματισθούν με n bits, ενώ δύο κορυφές ενώνονται με μία ακμή αν διαφέρουν κατά μία θέση bit. Στο Σχήμα 1.11 απεικονίζονται οι υπερκύβοι για n=1,2,3. Προφανώς, ισχύει $Q_0{=}N_1$, $Q_1{=}P_2$ και $Q_2{=}C_4$. Ένας υπερκύβος βαθμού $n{+}1$ παράγεται από δύο υπερκύβους βαθμού n με δύο ενέργειες: (α) συμπληρώνοντας στις επιγραφές των κορυφών του ενός το 0 και στου άλλου το 1 και (β) ενώνοντας δύο αντίστοιχες κορυφές.



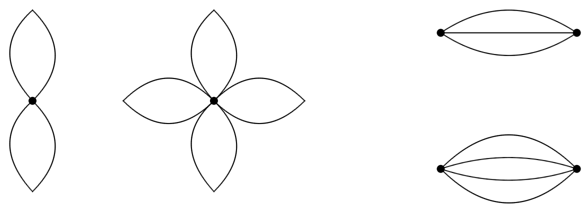
Σχήμα 1.11: *Υπερκύβοι Q_1, Q_2 και Q_3.*

Γράφος-μονοπάτι (path graph) καλείται ένας ελάχιστα συνδεδεμένος γράφος με $n{=}m{+}1$, ο οποίος μπορεί να σχεδιασθεί έτσι ώστε όλες οι κορυφές και οι ακμές του να κείνται επί ευθείας γραμμής. Ένας τέτοιος γράφος συμβολίζεται με P_n. Στο Σχήμα 1.12 παρουσιάζονται ο γράφος $P_2{=}K_2$ και ο P_4.

Σχήμα 1.12: *Γράφοι μονοπάτια P_2 και P_4.*

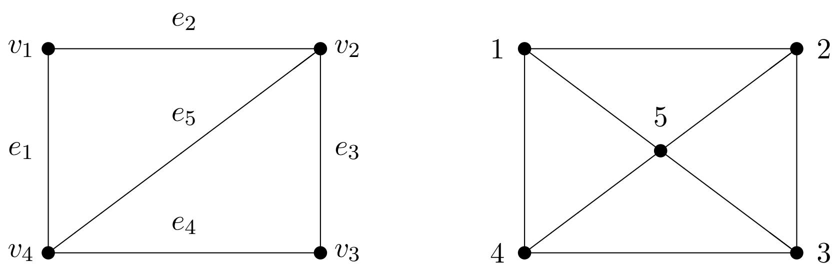
Ένας γράφος αποτελούμενος από n=1 κορυφή και $m{=}i$ βρόχους ονομάζεται *μπουκέτο* (bouquete), B_i. Ένας γράφος αποτελούμενος από n=2 κορυφές και

$m{=}j$ βρόχους ονομάζεται *δίπολο* (dipole), D_j. Στο Σχήμα 1.13 απεικονίζονται τα μπουκέτα B_2, B_4 και τα δίπολα D_3, D_4.



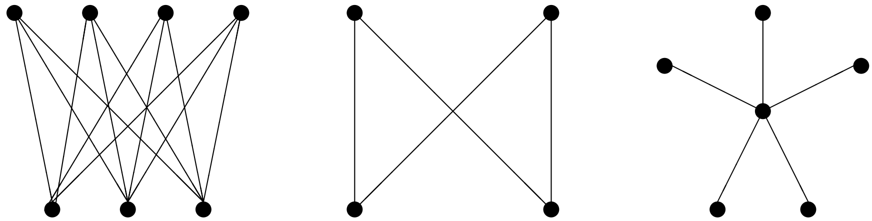
Σχήμα 1.13: *Μπουκέτα B_2, B_4 και δίπολα D_3, D_4.*

Γραμμικός γράφος (linear graph) $L(G)$ του γράφου G με n κορυφές και m ακμές ονομάζεται ένας γράφος με m κορυφές, ενώ δύο κορυφές του είναι γειτονικές αν οι αντίστοιχες ακμές του G πρόσκεινται στην ίδια κορυφή. Στο Σχήμα 1.14 παρουσιάζεται ένα τέτοιο παράδειγμα. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι $L(C_3) = C_3$.



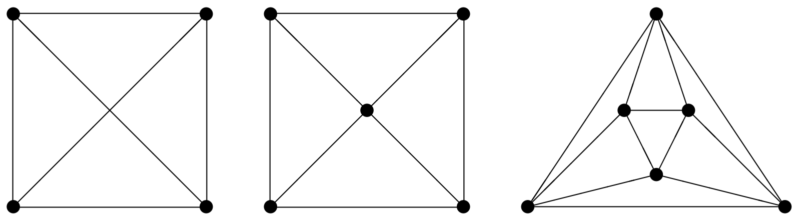
Σχήμα 1.14: *Απλός γράφος και αντίστοιχος γραμμικός.*

Αν είναι δυνατόν οι κορυφές ενός γράφου G να επιμερισθούν σε δύο υποσύνολα V_1 και V_2, έτσι ώστε κάθε ακμή του G να προσπίπτει σε μία κορυφή του υποσυνόλου V_1 και μία του V_2, τότε ο γράφος G ονομάζεται *διμερής* (bipartite) ή *διγράφος* (bigraph), ενώ τα V_1 και V_2 ονομάζονται *μερικά σύνολα* (partite sets). Αν κάθε κορυφή του υποσυνόλου V_1 συνδέεται με κάθε κορυφή του υποσυνόλου V_2, τότε ο γράφος G ονομάζεται *πλήρης διμερής* (complete bipartite) και συμβολίζεται με $K_{i,j}$, όπου $|V_1|{=}i$ και $|V_2|{=}j$. Στο Σχήμα 1.3 παρουσιάζονται δύο ισομορφικές μορφές του πλήρους διμερούς γράφου $K_{3,3}$. Επίσης, στο Σχήμα 1.15 παρουσιάζονται τρεις πλήρεις διμερείς γράφοι: ένας $K_{3,4}$, ένας $K_{2,2}$ που είναι ισομορφικός προς τον κυκλικό γράφο C_4 (δες Σχήμα 1.10) και ένας γράφος $K_{1,5}$, που ανήκει στην κατηγορία των *αστεροειδών* (star graphs), που συμβολίζονται με $K_{1,n}$ ή με $S_{1,n}$.



Σχήμα 1.15: *Πλήρεις διμερείς γράφοι $K_{3,4}$, $K_{2,2}$ και $K_{1,5}$.*

Κατά παρόμοιο τρόπο ορίζεται ο *πολυμερής* (k-partite) γράφος, αν το σύνολο V μπορεί να χωριστεί σε k ανεξάρτητα ανά δύο υποσύνολα $V_1, V_2, \ldots, V_k$, έτσι ώστε καμία ακμή του γράφου να μην ενώνει κορυφές που βρίσκονται στο ίδιο μερικό σύνολο. Αυτονόητος, επίσης, είναι ο ορισμός του *πλήρους πολυμερούς* (complete k-partite) γράφου. Το Σχήμα 1.16 παριστά τους πλήρεις πολυμερείς γράφους $K_{1,1,1,1}$ (που είναι ισομορφικός προς τον K_4), $K_{1,2,2}$ και $K_{2,2,2}$ (που είναι πλατωνικός με βάση το οκτάεδρο). Στους διμερείς γράφους θα δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στο Κεφάλαιο 10.



Σχήμα 1.16: *Πλήρεις πολυμερείς γράφοι $K_{1,1,1,1}$, $K_{1,2,2}$ και $K_{2,2,2}$.*

Ένας σημαντικός κλάδος της Θεωρίας Γράφων είναι η *Θεωρία Γράφων των Ακρότατων* (Extremal Graph Theory), που εξετάζει τους γράφους που έχουν μία ελάχιστη ή μέγιστη τιμή για κάποιο χαρακτηριστικό υπό τον περιορισμό ενός άλλου χαρακτηριστικού. Μία σημαντική ομάδα γράφων που έχει μελετηθεί στα πλαίσια αυτά είναι οι *κλωβοί* (cages). Ένας γράφος G ονομάζεται (g, r)-κλωβός, αν είναι τακτικός βαθμού r και έχει περιφέρεια μήκους g, όπου με τον όρο *περιφέρεια* (girth) εννοείται ο κυκλικός υπογράφος με την ελάχιστη τάξη (δες Ενότητα 6.2) και συμβολίζεται με $g(G)$ [1].

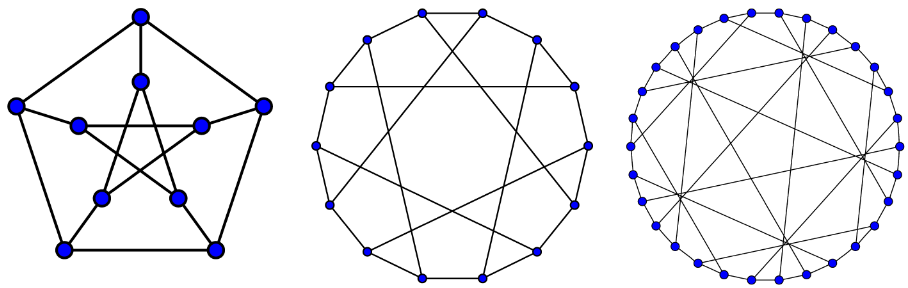
Αν $r{=}1$, τότε ο γράφος είναι άκυκλος και δεν μπορεί να ορισθεί κάποιος κλωβός. Αν $r{=}2$, τότε ο $(n, 2)$-κλωβός ταυτίζεται με το γράφο C_n. Συνεπώς,

[1] Ο κυκλικός υπογράφος με το μέγιστο μήκος ονομάζεται *περιφέρεια* (circumference) και συμβολίζεται με $c(G)$. Αυτή η έννοια δεν θα μας απασχολήσει στα πλαίσια του βιβλίου αυτού.

ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι κλωβοί με $r > 2$. Ο $(m,3)$-κλωβός ταυτίζεται με το γράφο K_{m+1}, ενώ ο $(m,4)$-κλωβός με τον πλήρη διμερή γράφο $K_{m,m}$ (δες Ενότητα 1.4). Ωστόσο, γενικώς η κατασκευή κλωβών δεν είναι εύκολη υπόθεση. Στον Πίνακα 1.1 δίνεται το πλήθος των κορυφών για τους κλωβούς που έχουν σχεδιασθεί για δεδομένες τιμές g και r.

$g =$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r = 3$	4	6	10	14	24	30	58	70	112	126
$r = 4$	5	8	19	26	67	80				728
$r = 5$	6	10	30	42		170				2730
$r = 6$	7	12	40	62		312				7812
$r = 7$	8	14	50	90						

Πίνακας 1.1: *Γνωστοί κλωβοί: πλήθος κορυφών για δεδομένα r και g.*



Σχήμα 1.17: *Απεικονίσεις (5,3)-, (6,3)- και (8,3)-κλωβών.*

Λόγω της δυσκολίας σχεδιασμού ενός κλωβού με συγκεκριμένες τιμές g και r, οι κλωβοί φέρουν το όνομα του ερευνητή που τους πρότεινε. Στο Σχήμα 1.17 παρουσιάζονται ο (5,3)-, ο (6,3)- και ο (8,3)-κλωβός, που φέρουν αντιστοίχως τα ονόματα του Petersen, του Heawood και των Tutte−Coxeter. Στην Ενότητα 10.4 θα αναφερθούμε σε άλλες έννοιες της Θεωρίας Γράφων Ακρότατων.

Ο **Julius Peter Christian Petersen** γεννήθηκε στο Soro της Δανίας και απεβίωσε στην Κοπεγχάγη (1839-1910). Αφού πήρε το διδακτορικό του δίπλωμα το 1871, δίδαξε σε ένα πολυτεχνείο και σε μία στρατιωτική ακαδημία, ενώ αργότερα έγινε καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Κοπεγχάγης. Ήταν επιθεωρητής των σχολείων μέσης εκπαίδευσης και έγραψε μία σειρά βιβλίων για τα σχολεία αυτά. Μάλιστα ένα βιβλίο του μεταφράσθηκε σε 5 γλώσσες. Πάντως ενδιαφερόταν μόνο για τους ικανούς μαθητές και τα βιβλία του θεωρούνταν δύσκολα. Ασχολήθηκε με άλγεβρα, θεωρία αριθμών, ανάλυση, μηχανική και γεωμετρία, αλλά έμεινε γνωστός για τις εργασίες του στους τακτικούς γράφους.

Ο **Percy John Heawood** (1861-1955) γεννήθηκε στο Newport της περιοχής Salop της Αγγλίας. Σπούδασε στην Οξφόρδη όπου κατόπιν δίδαξε. Από το 1887 εγκαταστάθηκε στο Durham και δίδαξε στο Durham College. Έμεινε εκεί μέχρι το θάνατό του και ασχολήθηκε επίμονα με τη διατήρηση ενός πύργου που κινδύνευε με κατάρρευση. Οι υπηρεσίες του αυτές αναγνωρίσθηκαν από το πανεπιστήμιο και την πατρίδα του. Όμως παγκόσμια γνωστός έγινε για τη δουλειά του σε σχέση με το χρωματισμό χαρτών (δες Κεφάλαιο 7), πρόβλημα με το οποίο ασχολήθηκε περί τα 60 χρόνια. Ασχολήθηκε επίσης με την επιπεδικότητα γράφων (δες Κεφάλαιο 6).

Ο **William Thomas Tutte** γεννήθηκε το 1917 στο Newmarket του Suffolk και απεβίωσε το 2002. Ήταν μαθηματικός και εργάσθηκε για το σπάσιμο γερμανικών κωδικών κατά τη διάρκεια του Β' Παγκόσμιου πολέμου. Σπούδασε Χημεία στο Trinity College του Cambridge αλλά στη συνέχεια έλαβε το διδακτορικό του στα Μαθηματικά από Cambridge το 1948. Την περίοδο 1948-1962 δίδαξε Μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο του Τορόντο, ενώ το 1962 μετακόμισε στο Τμήμα Συνδυαστικής και Βελτιστοποίησης του Πανεπιστημίου του Waterloo, όπου έμεινε μέχρι το 1985 και έλαβε την Καναδική υπηκοότητα. Μεταξύ των άλλων ασχολήθηκε με θεωρία ματροϊδών, αλλά ειδικότερα σχετικά με τη Θεωρία Γράφων μελέτησε πλήθος προβλημάτων σχετικά με δομές κύκλων και τομών, k-παράγοντες, Hamiltonian και μη Hamiltonian γράφους κ.α. Η απόδειξη του Θεωρήματος των 4 χρωμάτων βασίζεται σε δική του προγενέστερη δουλειά. Ήταν μέλος της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου και της Βασιλικής Εταιρείας του Καναδά. Είχε αριθμό Erdős 1.

Ο **Harold Scott MacDonald Coxeter** γεννήθηκε στο Λονδίνο και απεβίωσε στο Τορόντο (1907-2003). Σε νεαρή ηλικία συνέθεσε μουσική, έπαιζε πιάνο και αργότερα δημοσίευσε σχετικά με τη σχέση μαθηματικών και μουσικής. Σπούδασε στο Trinity College του Cambridge όπου και εκπόνησε το διδακτορικό του το 1931. Εργάσθηκε στο Princeton και εν τέλει μετακόμισε στο Τορόντο όπου έγινε Καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Τορόντο το 1948. Εργάσθηκε για 60 χρόνια στο Πανεπιστήμιο του Τορόντο και συνέγραψε 12 βιβλία. Μέλος του Royal Society of Canada από το 1948. Από 1978 η Καναδική Μαθηματική Εταιρεία απονέμει το Coxeter-James Prize προς τιμήν του. Το 1990 έγινε Αλλοδαπό Μέλος της Αμερικανικής Ακαδημίας Τεχνών και Επιστημών. Θεωρείται από τους μεγαλύτερους γεωμέτρες του 20ου αιώνα.

1.3 Ποσοτικά Στοιχεία

Λήμμα 1.1 (Euler, το λήμμα των χειραψιών)**.** *Το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών ενός πεπερασμένου γράφου $G(V,E)$ είναι διπλάσιο του πλήθους των ακμών:*

$$\sum_{\forall v \in V} d(v) \;=\; 2|E| \tag{1.1}$$

Απόδειξη. Αρκεί να θεωρηθεί ότι κάθε ακμή συνεισφέρει στο άθροισμα κατά 1 για κάθε μία από τις κορυφές όπου προσπίπτει. □

Πόρισμα 1.1. *Σε έναν τακτικό γράφο $G(V,E)$ βαθμού k ισχύει η σχέση:*

$$|V| \cdot k \;=\; 2 \cdot |E|$$

Ο **Leonhard Euler** (1697-1783) θεωρείται ο πατέρας της Θεωρίας Γράφων. Ο Euler γεννήθηκε στη Βασιλεία της Ελβετίας και ο πατέρας του ήταν Καλβινιστής ιερωμένος. Ακολουθώντας τη θέληση του πατέρα του ξεκίνησε να σπουδάζει θεολογία και εβραϊκά στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας. Σύντομα όμως φάνηκε ότι είχε κλίση στα μαθηματικά, που σπούδασε στη συνέχεια. Εργάσθηκε στην Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης υπό την αιγίδα της Αικατερίνης της Ι (1727-1740) και της Μεγάλης Αικατερίνης (1766-1783), ως συνεργάτης στο ιατρικό τμήμα αλλά αργότερα μετατέθηκε στο τμήμα των μαθηματικών, όπου διαδέχθηκε τον Daniel Bernoulli στην ηγεσία του. Στο μεσοδιάστημα 1740-1766 εργάσθηκε στην Ακαδημία του Βερολίνου υπό την αιγίδα του Μεγάλου Φρειδερίκου. Μαθηματική ιδιοφυία, πληρωνόταν για να ασχολείται με οτιδήποτε του κινούσε το ενδιαφέρον. Είχε μεγάλη ικανότητα στην εκτέλεση πράξεων με το μυαλό. Έτσι, αν και τα τελευταία 17 χρόνια της ζωής του ήταν τυφλός εργάσθηκε παραγωγικά και έθεσε τις βάσεις για τον υπολογισμό της τροχιάς της σελήνης, ένα πρόβλημα που έμεινε άλυτο από τον Newton.

Απόδειξη. Με βάση το Λήμμα 1.1. Από το πόρισμα αυτό είναι προφανές ότι δεν υπάρχουν τακτικοί γράφοι περιττής τάξης και βαθμού περιττού. □

Πόρισμα 1.2. *Το πλήθος των ακμών του γραμμικού γράφου $L(G)$ ισούται με:*

$$|E(L(G))| \;=\; \frac{1}{2}\sum_{\forall v\in V} d^2(v) - m$$

Απόδειξη. Με βάση το Λήμμα 1.1 προκύπτει ότι:

$$|E(L(G))| = \sum_{\forall v\in V} \binom{d(v)}{2} = \sum_{\forall v\in V} \frac{d(v)\;(d(v)-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{\forall v\in V} d^2(v) - m$$

□

Θεώρημα 1.1. *Το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού ενός πεπερασμένου γράφου είναι άρτιος αριθμός.*

Απόδειξη. Το δεξιό σκέλος της Σχέσης 1.1 είναι άρτιο. Για το αριστερό σκέλος της σχέσης αυτής συνεισφέρουν οι κορυφές με άρτιο βαθμό και οι κορυφές με περιττό βαθμό. Η συνεισφορά των πρώτων είναι άρτιος αριθμός, άρα άρτιος αριθμός είναι και η συνεισφορά της δεύτερης κατηγορίας. Από τον τελευταίο συλλογισμό προκύπτει η αλήθεια του θεωρήματος. □

Θεώρημα 1.2. *Το πλήθος m των ακμών ενός πλήρους γράφου K_n είναι:*

$$m \;=\; n(n-1)/2$$

Απόδειξη. Αρκεί να θεωρηθεί ότι σε κάθε κορυφή προσπίπτουν $n-1$ ακμές και ότι κάθε ακμή υπολογίζεται δύο φορές. □

Θεώρημα 1.3. *Για έναν απλό γράφο G με n κορυφές, m ακμές και k συνιστώσες ισχύει η σχέση:*

$$n-k \leq m \leq (n-k)(n-k+1)/2$$

Απόδειξη. Αριστερό σκέλος. Θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή με βάση το πλήθος των ακμών. Αν ο G είναι μηδενικός (m=0), τότε η αλήθεια είναι προφανής. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι ο G περιέχει τον ελάχιστο δυνατό αριθμό ακμών m_0, έτσι ώστε η αφαίρεση μίας ακμής να αυξάνει το πλήθος των συνιστωσών κατά μία. Με βάση την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει: $m_0 - 1 \geq n-(k+1)$ από όπου συνεπάγεται ότι: $m_0 \geq n-k$.

Δεξιό σκέλος. Έστω ότι κάθε συνιστώσα έχει $n_i \geq 1$ κορυφές (όπου $1 \leq i \leq k$). Έτσι ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \;=\; n \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \;(n_i - 1) \;=\; n-k$$

Με ύψωση στο τετράγωνο και κατάλληλη άλγεβρα προκύπτει η σχέση:

$$\sum_{i=1}^{k} \;{n_i}^2 \;\leq\; n^2 \;-\; (k-1)(2n-k) \tag{1.2}$$

Από το προηγούμενο θεώρημα είναι γνωστό ότι το μέγιστο πλήθος ακμών στην i-οστή συνιστώσα είναι $n_i(n_i-1)/2$. Συνεπώς:

$$m \;\leq\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \;(n_i - 1)\; n_i \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \;{n_i}^2 \;-\; n/2$$

Χρησιμοποιώντας τη Σχέση 1.2 και με κατάλληλη άλγεβρα προκύπτει το θεώρημα. □

Πόρισμα 1.3. *Κάθε απλός γράφος με n κορυφές και τουλάχιστον $(n-1)(n-2)/2$ ακμές είναι συνδεδεμένος.*

Απόδειξη. Με βάση το Θεώρημα 1.3. Συναφές είναι το Θεώρημα 5.6. □

Η εύρεση του συνολικού πλήθους των γράφων που έχουν μία συγκεκριμένη ιδιότητα λέγεται *μέτρηση* (counting) ή *απαρίθμηση* (enumeration). Οι δύο επόμενες προτάσεις εξυπηρετούν το σκοπό αυτό.

Θεώρημα 1.4. *Το συνολικό πλήθος των απλών γράφων με επιγραφές που έχουν n κορυφές και m ακμές είναι:*

$$\binom{n(n-1)/2}{m}$$

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Πόρισμα 1.4. *Το συνολικό πλήθος των απλών γράφων με επιγραφές και n κορυφές είναι:*

$$2^{n(n-1)/2}$$

Απόδειξη. Με βάση το Θεώρημα 1.4 και δεχόμενοι ότι το m κυμαίνεται από 0 ως $n(n-1)/2$. Το πόρισμα προκύπτει χρησιμοποιώντας την ταυτότητα: $\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} = 2^k$. □

Το επόμενο θεώρημα δίνει εύκολα ένα κάτω όριο της ελάχιστης τάξης ενός κλωβού ως συνάρτηση των δύο μεταβλητών $g(G)$ και r. Αντικαθιστώντας τη μεταβλητή r με την μεταβλητή $d(G)$, το όριο αυτό ισχύει και για κάθε γράφο G που έχει περιφέρεια $g(G)$ και ελάχιστο βαθμό κορυφών $d(G)$.

Θεώρημα 1.5. *Αν με $f(g,r)$ συμβολίζεται το κάτω όριο της τάξης ενός (g,r)-κλωβού, τότε ισχύει:*

$$f(g,r) \;\geq\; \begin{cases} \frac{r(r-1)^{g_1}-2}{r-2} & \text{αν } g = 2g_1+1 \\[2ex] \frac{(r-1)^{g_1}-1}{r-2} & \text{αν } g = 2g_1 \end{cases}$$

Απόδειξη. Έστω ότι το g είναι περιττό, ισχύει δηλαδή $g{=}2g_1{+}1$. Ας θεωρηθεί ο γράφος που επηρεάζεται από τις κορυφές που βρίσκονται σε απόσταση g_1 από τυχούσα κορυφή x. Ο γράφος αυτός είναι δένδρο γιατί αν περιείχε κύκλο, ο κύκλος αυτός θα είχε μήκος λιγότερο από g. [2] Εφόσον σε απόσταση $j{+}1$ βρίσκονται τουλάχιστον $r(r-1)^j$ κορυφές έπεται ότι:

$$f(g,r) \;\geq\; 1 + r\sum_{j=0}^{g_1}(r-1)^j$$

από όπου ακολουθεί η αλήθεια του πρώτου σκέλους της πρότασης.

[2] Η δομή των δένδρων είναι γνωστή από τα μαθήματα των Δομών Δεδομένων και της Θεωρίας Αλγορίθμων. Ωστόσο, η παρατήρηση αυτή θα γίνει καλύτερα αντιληπτή μετά την ανάγνωση των Ενοτήτων 2.1 και 4.1, όπου ορίζονται οι έννοιες του κύκλου και του δένδρου αντιστοίχως.

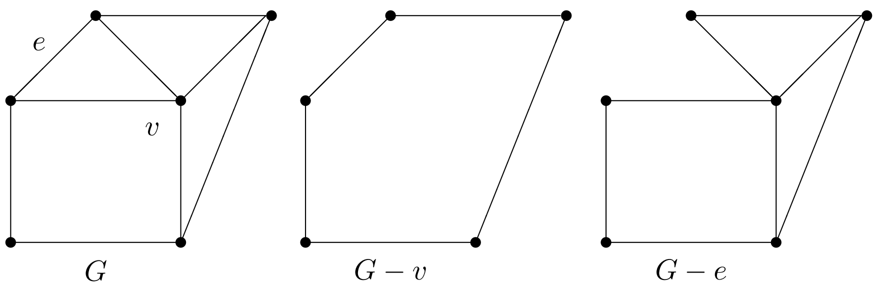
Τώρα, ας υποτεθεί ότι το g είναι άρτιο, δηλαδή ισχύει $g{=}2g_1$. Τότε αρκεί να θεωρηθούν οι κορυφές που βρίσκονται σε απόσταση g_1 από τυχούσα ακμή (x,y). Με διαδικασία ανάλογη προς την προηγούμενη προκύπτει και το δεύτερο σκέλος της πρότασης. □

1.4 Πράξεις επί των Γράφων

Οι πράξεις επί των γράφων διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: αυτές που εφαρμόζονται σε ένα γράφο και αυτές που εφαρμόζονται σε δύο γράφους. Οι δύο αυτές κατηγορίες ονομάζονται αντιστοίχως *μοναδιαίες* (unary) και *δυαδικές* (binary). Σύμφωνα με μία άλλη κατηγοριοποίηση, οι πράξεις διακρίνονται σε *πρωτεύουσες* (primary) και *δευτερεύουσες* (secondary), όπου οι δεύτερες υλοποιούνται με συνδυασμό ή επανάληψη πρωτευουσών πράξεων.

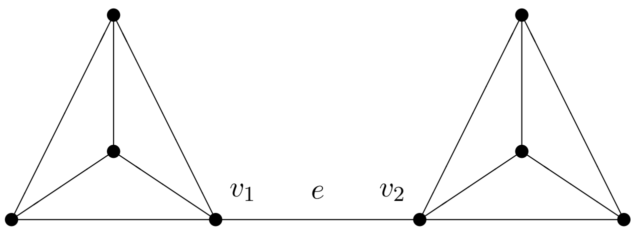
1.4.1 Πρωτεύουσες πράξεις

Οι πρωτεύουσες πράξεις είναι δύο: η διαγραφή και η πρόσθεση. Η πράξη της *διαγραφής* (deletion) έχει δύο εκδοχές: διαγραφή κορυφής και διαγραφή ακμής. Η διαγραφή κορυφής από ένα γράφο G συμβολίζεται με $G - v$ και δηλώνει το γράφο που προκύπτει από το γράφο G αγνοώντας την κορυφή v και τις αντίστοιχες προσπίπτουσες ακμές. Η διαγραφή ακμής συμβολίζεται με $G - e$ και δηλώνει το γράφο που προκύπτει από ένα γράφο G αν αγνοηθεί η ακμή e (χωρίς να διαγραφούν τα τερματικά της σημεία). Στο Σχήμα 1.18 παρουσιάζεται παράδειγμα διαγραφής κορυφής και ακμής από τον ίδιο γράφο.



Σχήμα 1.18: *Διαγραφή κορυφής και διαγραφή ακμής.*

Αν κατά τη διαγραφή μίας κορυφής από ένα συνδεδεμένο γράφο προκύψουν δύο ή περισσότερες συνιστώσες, τότε η κορυφή αυτή λέγεται *αποκόπτουσα* κορυφή (cut-vertex) ή *σημείο άρθρωσης* (articulation point). Κατά τον ίδιο τρόπο, αν με τη διαγραφή μίας ακμής e προκύψουν δύο συνιστώσες, τότε η ακμή αυτή ονομάζεται *αποκόπτουσα* ακμή (cut-edge) ή *ισθμός* (isthmus) ή *γέφυρα* (bridge). Τα τερματικά σημεία μίας τέτοιας ακμής είναι αποκόπτουσες κορυφές. Ένας γράφος που δεν περιέχει αποκόπτουσες ακμές ονομάζεται *δισυναφής* (bicoherent). Ένας γράφος που δεν περιέχει αποκόπτουσες κορυφές ονομάζεται *δισυνδεδεμένος* (biconnected) ή *μη διαχωριστός* (nonseparable), ενώ λέγεται ότι ο γράφος αποτελείται από ένα *τεμάχιο* (block). Προφανώς, ένας διαχωριστός γράφος έχει μία ή περισσότερες αποκόπτουσες κορυφές. Στο Σχήμα 1.19 παρουσιάζεται ένας γράφος με δύο αποκόπτουσες κορυφές v_1, v_2 και μία αποκόπτουσα ακμή e.



Σχήμα 1.19: *Γράφος με 2 αποκόπτουσες κορυφές και 1 αποκόπτουσα ακμή.*

Η πράξη της *πρόσθεσης* (addition) αναλογικώς προς την πράξη της διαγραφής έχει επίσης δύο εκδοχές: πρόσθεση κορυφής και πρόσθεση ακμής. Κατά την πρόσθεση μίας κορυφής v σε ένα γράφο $G(V, E)$ προκύπτει ένας νέος γράφος με σύνολο κορυφών $V(G) \cup v$ και σύνολο ακμών $E(G)$, ενώ κατά την πρόσθεση ακμής μεταξύ δύο κορυφών u και v ενός γράφου $G(V, E)$ προκύπτει ένας γράφος με σύνολο κορυφών $V(G)$ και σύνολο ακμών $E(G) \cup (u, v)$. Η πράξη αυτή είναι αντίστροφη της διαγραφής, οπότε το Σχήμα 1.18 μπορεί να διαβασθεί κατά την αντίστροφη σειρά ως ένα παράδειγμα πρόσθεσης. Οι πράξεις που ακολουθούν είναι δευτερεύουσες και μπορούν να εξηγηθούν με βάση τις δύο προηγούμενες πρωτεύουσες πράξεις.

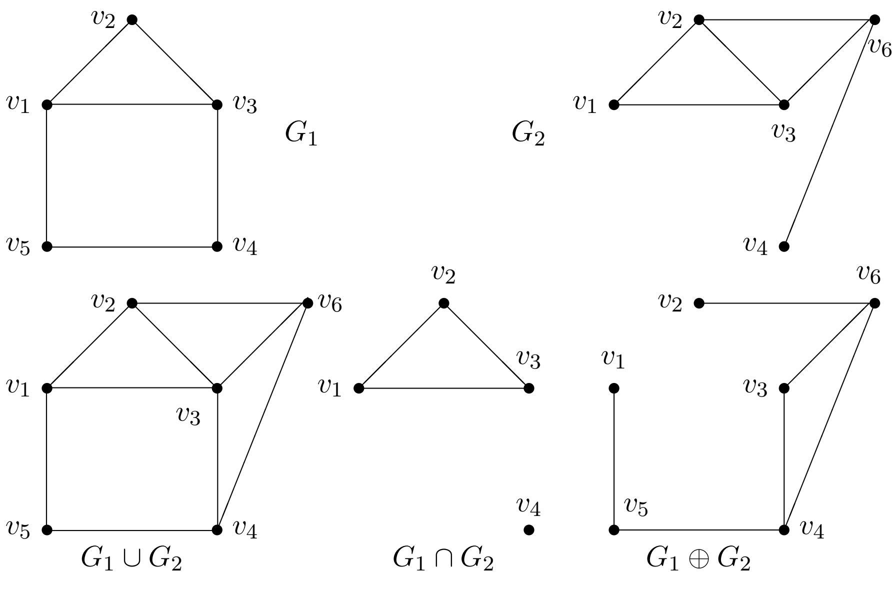
1.4.2 Δευτερεύουσες πράξεις

Δυαδικές πράξεις

Ένωση (union) δύο γράφων $G_1(V_1, E_1)$ και $G_2(V_2, E_2)$ ονομάζεται ο γράφος G με σύνολο κορυφών $V(G) = V_1 \cup V_2$ και σύνολο ακμών $E(G) = E_1 \cup E_2$. Κάθε μη συνδεδεμένος γράφος μπορεί να εκφρασθεί ως ένωση δύο ή περισσοτέρων συνδεδεμένων συνιστωσών. Η ένωση m ισομορφικών γράφων G συμβολίζεται με mG (δες Σχήμα 1.38). Αν ένας γράφος G μπορεί να εκφρασθεί ως ένωση των παραγόντων του (δες Ενότητα 1.1), που είναι ανεξάρτητοι ως προς τις ακμές, τότε η ένωση αυτή ονομάζεται *παραγοντοποίηση* (factorization) του G.

Η *τομή* (intersection) δύο γράφων ορίζεται με παρόμοιο τρόπο με τον ορισμό της ένωσης. Δηλαδή, τομή δύο γράφων $G_1(V_1, E_1)$ και $G_2(V_2, E_2)$ ονομάζεται ο γράφος G με σύνολο κορυφών $V(G)=V_1 \cap V_2$ και $E(G)=E_1 \cap E_2$.

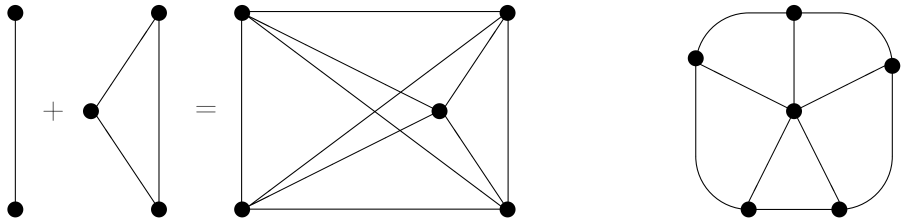
Άθροισμα δακτυλίου (ring sum) δύο γράφων $G_1(V_1, E_1)$ και $G_2(V_2, E_2)$ ονομάζεται ο γράφος $G = G_1 \oplus G_2$ με σύνολο κορυφών $V(G) = V_1 \cup V_2$, ενώ το σύνολο των ακμών του αποτελείται από τις ακμές που ανήκουν μόνο στον ένα από τους δύο γράφους, αλλά όχι και στους δύο, δηλαδή ισχύει $E(G) = (E_1 \cup E_2) - (E_1 \cap E_2)$. Παράδειγμα ένωσης, τομής και αθροίσματος δακτυλίου δίνεται στο Σχήμα 1.20.



Σχήμα 1.20: *Ένωση, τομή και άθροισμα δακτυλίου γράφων.*

Η *σύνδεση* (join) ή *άθροισμα* (sum) δύο γράφων G_1 και G_2 συμβολίζεται με $G=G_1+G_2$ και είναι ένας γράφος που αποτελείται από το γράφο $G_1 \cup G_2$ και όλες τις δυνατές ακμές μεταξύ των κορυφών του G_1 και του G_2. Για παράδειγμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.21 η ένωση ενός γράφου N_1 και ενός γράφου C_{n-1} δίνει ως άθροισμα ένα γράφο που ονομάζεται *τροχοειδής* (wheel) και συμβολίζεται με W_n. Επίσης, μπορεί να αποδειχθεί ότι $K_m+K_n=K_{m+n}$ και $mK_1+nK_1=K_{m,n}$.

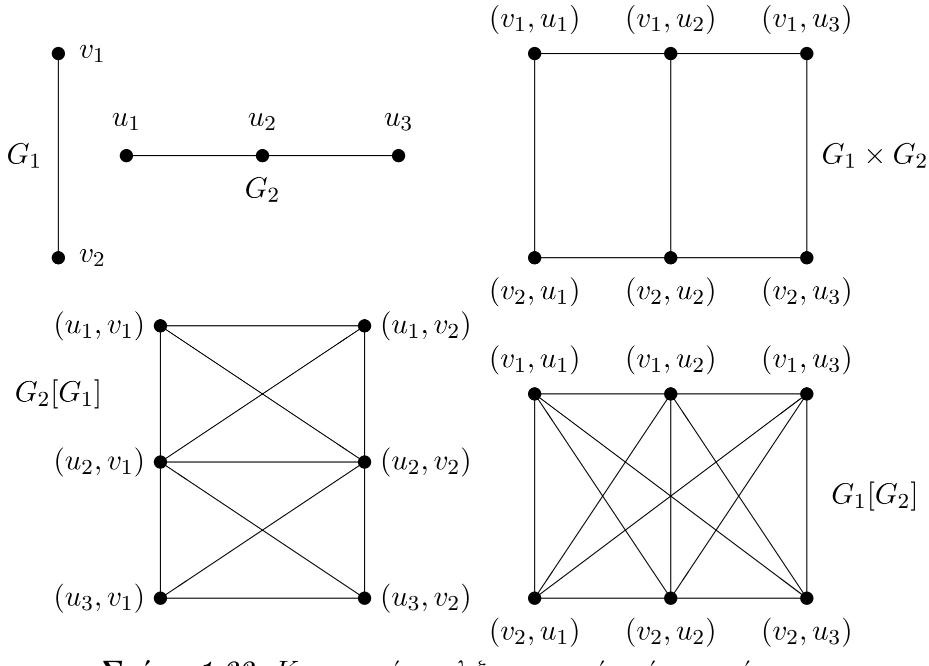
Το *καρτεσιανό γινόμενο* (cartesian product), ή απλά το γινόμενο, δύο γράφων G_1 και G_2 συμβολίζεται με $G_1 \times G_2$ και ορίζεται ως ο γράφος με σύνολο κορυφών $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$, ενώ δύο κορυφές $v= (v_1, v_2)$ και $u=(u_1, u_2)$



Σχήμα 1.21: *Άθροισμα γράφων και τροχοειδής γράφος W_6.*

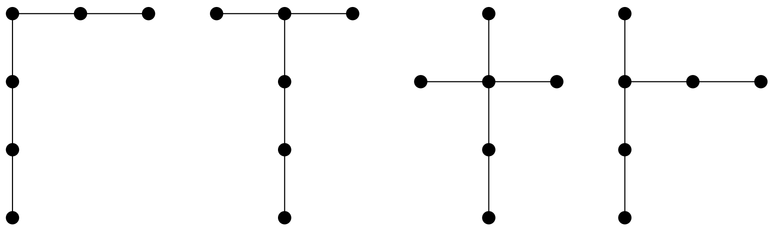
είναι γειτονικές στο καρτεσιανό γινόμενο αν $v_1{=}u_1$ και η v_2 συνδέεται με την u_2 στο γράφο G_2 ή, συμμετρικά, αν $v_2{=}u_2$ και η v_1 συνδέεται με την u_1 στο γράφο G_1.Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο υπερκύβος Q_n παράγεται εφαρμόζοντας n φορές το καρτεσιανό γινόμενο στον P_2.

Το *λεξικογραφικό γινόμενο* (lexicographical product) ή η *σύνθεση* (composition) δύο γράφων G_1 και G_2 συμβολίζεται με $G_1[G_2]$ και ορίζεται ως ο γράφος με σύνολο κορυφών $V(G_1[G_2]) = V(G_1) \times V(G_2)$, ενώ δύο ακμές $v{=}(v_1, v_2)$ και $u{=}(u_1, u_2)$ είναι γειτονικές στο λεξικογραφικό γινόμενο αν η v_1 συνδέεται με την u_1 στο γράφο G_1 ή αν $v_1{=}u_1$ και η v_2 συνδέεται με την u_2 στο γράφο G_2. Παράδειγμα γινομένου και σύνθεσης δύο γράφων δίνεται στο Σχήμα 1.22.



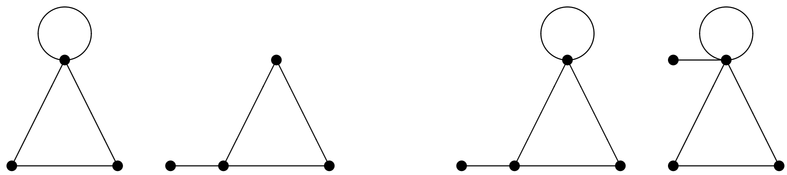
Σχήμα 1.22: *Καρτεσιανό και λεξικογραφικό γινόμενο γράφων.*

Δεδομένων δύο γράφων G_1, G_2 και των κορυφών $v \in G_1$ και $u \in G_2$, *αμάλγαμα κορυφών* (vertex amalgamation) είναι ο γράφος που προκύπτει από την ένωση των δύο γράφων ταυτίζοντας τις κορυφές v και u σε μία κοινή κορυφή. Στο Σχήμα 1.23 παρουσιάζονται όλοι οι δυνατοί τρόποι αμαλγαματοποίησης των γράφων P_3 και P_4. Είναι ευνόητο ότι από την αμαλγαματοποίηση δύο κυκλικών γράφων, μόνο ένας ισομορφικός γράφος μπορεί να προκύψει καθώς δεν έχει κάποια σημασία πως θα επιλεγεί ο κάθε κόμβος από τους δύο κυκλικούς γράφους.



Σχήμα 1.23: *Αμαλγαματοποίηση του P_3 και P_4.*

Τέλος, δεδομένων των γράφων G_1, G_2 και ενός κοινού υπογράφου H, *αμάλγαμα υπογράφων* (subgraph amalgmation) είναι ο γράφος που προκύπτει από την ένωση των δύο γράφων ταυτίζοντας τις αντίστοιχες κορυφές του H στις κοινές κορυφές. Στο παράδειγμα του Σχήματος 1.24 οι δύο γράφοι στα αριστερά έχουν κοινό υπογράφο το C_3, ενώ δεξιά προκύπτουν οι δύο μη ισομορφικοί γράφοι.



Σχήμα 1.24: *Αμαλγαματοποίηση υπογράφου.*

Ο Πίνακας 1.2 δίνει το πλήθος των κορυφών και ακμών του γράφου G που προκύπτει από κάθε δυαδική πράξη επί δύο γράφων $G_1(V_1, E_1)$ και $G_2(V_2, E_2)$. Σημειώνεται ότι μόνο για τις τέσσερις πρώτες πράξεις επιτρέπεται η ύπαρξη κοινών κορυφών μεταξύ των δύο αρχικών γράφων.

Μοναδιαίες πράξεις

Το *συμπλήρωμα* (complement) ενός γράφου G συμβολίζεται ως $\tilde{G}$ και είναι ένας γράφος που έχει σύνολο κορυφών $V(\tilde{G})=V(G)$, ενώ το σύνολο των ακμών