

# Κεφάλαιο 1

## Ποσά, ποσοστά, μερισμός και εταιρείες

### 1. Ποσά ανάλογα

*Ποσό* ή *μέγεθος* ονομάζεται κάθε τι που δύναται να αυξηθεί ή ελαττωθεί, για παράδειγμα, οι κάτοικοι μιας πόλης, οι καταθέσεις - αναλήψεις σε μια τράπεζα, ο αριθμός των μαθητών ενός σχολείου, ο αριθμός των εργαζομένων σε μια επιχείρηση κ.λπ. είναι ποσά.

Δυο ποσά ονομάζονται *ανάλογα* ή *ευθέως ανάλογα* όταν πολλαπλασιαζόμενη η τιμή του ενός ποσού επί έναν αριθμό, πολλαπλασιάζεται και η τιμή του άλλου ποσού επί τον ίδιο αριθμό, ή διαιρούμενη η τιμή του ενός ποσού δια ενός αριθμού, διαιρείται και η τιμή του άλλου ποσού δια του ίδιου αριθμού αντίστοιχα. Για παράδειγμα ο χρόνος που εργάζεται ένας υπάλληλος είναι ανάλογος της αμοιβής του, π.χ. αν ένας υπάλληλος εργάζεται 40 ώρες την εβδομάδα και παίρνει 7,5 Ευρώ την ώρα, τότε αμείβεται με  $7,5 \cdot 40 = 300$  Ευρώ εβδομαδιαίως. Το κόστος παραγωγής ενός προϊόντος είναι ανάλογο της τιμής πώλησής του, η απόσταση που διανύει ένα όχημα είναι ανάλογη του χρόνου και της απαιτούμενης καύσιμης ύλης κ.α.

Δυο ποσά ονομάζονται *αντίστροφα* ή *αντιστρόφως ανάλογα*, όταν πολλαπλασιαζόμενη η τιμή του ενός ποσού επί έναν αριθμό, διαιρείται η τιμή του άλλου ποσού δια τον ίδιο αριθμό, ή διαιρούμενη η τιμή του ενός ποσού δια ενός αριθμού, πολλαπλασιάζεται η τιμή του άλλου ποσού επί τον ίδιο αριθμό αντίστοιχα. Για παράδειγμα ο χρόνος που απαιτείται για

την εκτέλεση μιας εργασίας είναι αντιστρόφως ανάλογος του αριθμού των εργαζομένων, π.χ. αν ένας εργαζόμενος τελειώνει ένα έργο σε 4 ώρες, δυο εργαζόμενοι τελειώνουν το ίδιο έργο σε 2 ώρες. Η ταχύτητα με την οποία κινείται ένα όχημα είναι αντιστρόφως ανάλογη του χρόνου που απαιτείται για να διανύσει μια απόσταση κ.α.

Απλή μέθοδος των τριών ονομάζεται η μέθοδος εκείνη στην οποία δίνονται τρία ποσά (γνωστοί αριθμοί) και ζητείται να υπολογιστεί ένα τέταρτο άγνωστο ποσό. Πρώτη ενέργεια που κάνουμε στην απλή μέθοδο των τριών είναι η κατάταξη των ποσών και η σύγκριση για το αν είναι ευθέως ή αντιστρόφως ανάλογα μεταξύ τους.

**Παράδειγμα.** Τρία κιλά μήλα κοστίζουν 3,60 Ευρώ. Πόσο κοστίζουν 5 κιλά μήλα ;

Κάνουμε την κατάταξη του προβλήματος ως εξής:

Τα 3 κιλά κοστίζουν 3,60 Ευρώ

Τα 5 κιλά κοστίζουν  $x$ ;

Προφανώς τα πιο πάνω ποσά είναι ευθέως ανάλογα, οπότε ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} &= \frac{3,60}{x} \Rightarrow 3x = 5 \cdot 3,60 \\ &\Rightarrow x = \frac{5 \cdot 3,60}{3} \\ &\Rightarrow x = 6. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή το  $x$  είναι ίσο με τον αριθμό που βρίσκεται από πάνω του επί το αντίστροφο κλάσμα της κατάταξης, δηλαδή,

$$x = 3,60 \cdot \frac{5}{3} = 6.$$

Συνεπώς τα 5 κιλά μήλα κοστίζουν 6 Ευρώ.

**Παράδειγμα.** Τέσσερα τρακτέρ οργώνουν μια έκταση σε 9 ημέρες αν λειτουργούν ίσο αριθμό ωρών κάθε ημέρα. Πόσα τρακτέρ χρειάζονται για να οργώσουν την ίδια έκταση σε 6 ημέρες;

Τα πιο πάνω ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα και η κατάταξή τους είναι:

4 τρακτέρ οργώνουν την έκταση σε 9 ημέρες  
 $x$  τρακτέρ οργώνουν την έκταση σε 6 ημέρες;

Αφού τα πιο πάνω ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, θα ισχύει:

$$\frac{4}{x} = \frac{6}{9} \text{ ή } x = 4 \cdot \frac{9}{6} = 6.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι το  $x$  ισούται με τον αριθμό που βρίσκεται από πάνω του επί το κλάσμα όπως είναι.

**Παράδειγμα.** Μία βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε δεκαοκτώ λεπτά της ώρας. Σε πόσα λεπτά μπορούν να γεμίσουν την ίδια δεξαμενή έξι βρύσες που έχουν την ίδια ροή με την αρχική βρύση;

Στό παραπάνω πρόβλημα τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα και η κατάταξή τους είναι η ακόλουθη:

Μία βρύση γεμίζει τη δεξαμενή σε 18 λεπτά.  
Έξι βρύσες γεμίζουν τη δεξαμενή σε  $x$  λεπτά;

Άρα

$$\frac{1}{6} = \frac{x}{18} \text{ ή } x = 18 \cdot \frac{1}{6} = 3.$$

Συνεπώς οι έξι βρύσες θα γεμίσουν τη δεξαμενή σε τρία λεπτά της ώρας.

## 2. Σύνθετη μέθοδος των τριών

Πολλές φορές, σε προβλήματα που σχετίζονται με την απλή μέθοδο των τριών, δίνονται περισσότερα από δυο ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Στις περιπτώσεις αυτές μπορούμε να αναλύσουμε ένα τέτοιο πρόβλημα σε δυο ή περισσότερα προβλήματα απλής μεθόδου των τριών και για το λόγο αυτό τα συγκεκριμένα προβλήματα επιλύονται με τη *σύνθετη μέθοδο των τριών*.

Για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων εργαζόμαστε όπως και προηγουμένως, δηλαδή, το  $x$  ισούται με τον αριθμό που βρίσκεται από πάνω του, πολλαπλασιαζόμενο επί κάθε ένα από τα κλάσματα που σχηματίζονται από τα ποσά, αντεστραμμένα αν αυτά είναι ανάλογα ή όπως είναι αν αυτά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

**Παράδειγμα.** Ένα κομμάτι ύφασμα έχει μήκος 8 μέτρα και πλάτος 70 εκατοστά του μέτρου και κοστίζει 180 Ευρώ. Πόσο θα πληρώσουμε αν αγοράσουμε ένα κομμάτι ύφασμα της ίδιας ποιότητας με το πιο πάνω, αλλά μήκους 14 μέτρα και πλάτους 56 εκατοστά;

Κάνουμε την κατάταξη του προβλήματος ως εξής:

Τα 8 μέτρα μήκος και 0,70 μέτρα πλάτος κοστίζουν 180 Ευρώ.

Τα 14 μέτρα μήκος και 0,56 μέτρα πλάτος κοστίζουν  $x$ ;

Από τη σύγκριση των πιο πάνω ποσών βλέπουμε ότι, τα ποσά μήκος και κόστος είναι ανάλογα, το ίδιο ισχύει και για τα ποσά πλάτος και κόστος. Άρα έχουμε:

$$x = 180 \cdot \frac{14}{8} \cdot \frac{0,56}{0,70} \Rightarrow x = 252.$$

Δηλαδή για το κομμάτι ύφασμα με 14 μέτρα μήκος και 56 εκατοστά πλάτος θα πληρώσουμε 252 Ευρώ.

**Παράδειγμα.** Δώδεκα εργαζόμενοι, με βωρη απασχόληση ημερησίως, τελειώνουν ένα συγκεκριμένο έργο σε 25 ημέρες. Πόσες ημέρες πρέπει να απασχοληθούν 20 εργαζόμενοι για να τελειώσουν το ίδιο έργο, αλλά με βωρη απασχόληση ημερησίως;

Κάνουμε την κατάταξη του προβλήματος ως εξής:

Οι 12 εργαζόμενοι με 8 ώρες την ημέρα τελειώνουν σε 25 ημέρες.

Οι 20 εργαζόμενοι με 6 ώρες την ημέρα τελειώνουν σε  $x$ ;

Από τη σύγκριση των πιο πάνω ποσών βλέπουμε ότι, τα ποσά εργαζόμενοι και ημέρες είναι αντιστρόφως ανάλογα, το ίδιο ισχύει και για τα ποσά ώρες ημερησίως και ημέρες. Άρα έχουμε:

$$x = 25 \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{20} \Rightarrow x = 20.$$

Δηλαδή οι 20 εργαζόμενοι θα τελειώσουν το έργο σε 20 ημέρες αν απασχολούνται σε βωρη βάση ημερησίως.

### 3. Ποσοστά

Σε προβλήματα όπου είναι αναγκαίο να υπολογιστούν τα κέρδη ή οι ζημιές, ή οι προμήθειες μιας εταιρείας, οι εκπτώσεις στις πωλήσεις,

τα ασφάλιστρα, οι μεσιτείες, οι αυξομειώσεις σε πληθυσμούς, η αύξηση στους μισθούς των εργαζομένων, οι μεταβολές του δείκτη των τιμών των μετοχών στο χρηματιστήριο, το απόβαρο κ.α. κάνουμε χρήση της λεγόμενης μεθόδου των ποσοστών. Τέτοια προβλήματα επιλύονται με την απλή μέθοδο των τριών, όπου τα εκάστοτε ποσά είναι πάντα ευθέως ανάλογα μεταξύ τους και ένα από αυτά είναι το 100 ή το 1.000.

Τα προβλήματα ποσοστών διακρίνονται στις εξής κύριες κατηγορίες:

(i) Δίνεται η αρχική αξία ενός ποσού και ζητείται η τελική του αξία.

(ii) Δίνεται η τελική αξία και ζητείται η αρχική.

(iii) Υπολογισμός του ποσοστού.

(iv) Ειδικά προβλήματα ποσοστών.

**Παράδειγμα.** Ένα κατάστημα πωλεί κάποιο εμπόρευμα του με κέρδος 15%. Πόσο κέρδος θα έχει αν πωλήσει εμπόρευμα συνολικής αξίας 3.000 Ευρώ;

Η κατάταξη των ποσών εδώ έχει ως εξής:

Στα 100 Ευρώ έχουμε κέρδος 15 Ευρώ.

Στα 3.000 Ευρώ έχουμε κέρδος  $x$ ;

Οπότε

$$x = 15 \cdot \frac{3.000}{100} \Rightarrow x = 450.$$

Συνεπώς το συνολικό κέρδος από το εμπόρευμα των 3.000 Ευρώ θα είναι 450 Ευρώ.

**Παράδειγμα.** Κέρδη 16.000 Ευρώ μιας επιχείρησης μοιράστηκαν στους τρεις μετόχους της Α, Β και Γ ως ακολούθως: Ο πρώτος πήρε 6.080 Ευρώ, ο δεύτερος πήρε 5.120 Ευρώ και ο τρίτος πήρε 4.800 Ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό κάθε μετόχου.

Η κατάταξη των ποσών για τον Α μέτοχο έχει ως εξής:

Στα 16.000 Ευρώ έχουμε κέρδος 6.080 Ευρώ.

Στα 100 Ευρώ έχουμε κέρδος  $x$ ;

Οπότε

$$x = 6.080 \cdot \frac{100}{16.000} \Rightarrow x = 38\%.$$

Ομοίως για τον Β μέτοχο έχουμε:

Στα 16.000 Ευρώ έχουμε κέρδος 5.120 Ευρώ.

Στα 100 Ευρώ έχουμε κέρδος  $x$ ;

Οπότε

$$x = 5.120 \cdot \frac{100}{16.000} \Rightarrow x = 32\%.$$

Και τέλος ο Γ μέτοχος θα πάρει  $100 - 32 - 38 = 30\%$ , ή διαφορετικά,

Στα 16.000 Ευρώ έχουμε κέρδος 4.800 Ευρώ.

Στα 100 Ευρώ έχουμε κέρδος  $x$ ;

Οπότε

$$x = 4.800 \cdot \frac{100}{16.000} \Rightarrow x = 30\%.$$

**Παράδειγμα.** Η χρηματιστηριακή τιμή μιας εταιρείας ήταν 5 Ευρώ στις 2/6/02 και στις 10/10/02 ήταν 3,32 Ευρώ. Να υπολογιστεί η ποσοστιαία μείωση της μετοχής της εταιρείας για το πιο πάνω χρονικό διάστημα.

Η μείωση της μετοχής για το χρονικό διάστημα από 2/6/02 έως 10/10/02 είναι  $5,00 - 3,32 = 1,68$  Ευρώ και έτσι η κατάταξη των ποσών έχει ως εξής:

Στα 5,00 Ευρώ έχουμε μείωση 1,68 Ευρώ.

Στα 100 Ευρώ έχουμε μείωση  $x$ ;

Οπότε

$$x = 1,68 \cdot \frac{100}{5} \Rightarrow x = 33,6\%.$$

**Παράδειγμα.** Ο κ. Αργυρίου, έμπορος επίπλων, αγόρασε ένα σαλόνι από το εργοστάσιο κατασκευής και το πούλησε με κέρδος 18% επί της τιμής αγοράς. Αν από την πώληση του σαλονιού ο έμπορος έβγαλε κέρδος 216 Ευρώ, πόσο είχε αγοράσει το σαλόνι;

Στα 100 Ευρώ της τιμής αγοράς, το κέρδος είναι 18 Ευρώ.

Στα  $x$  Ευρώ της τιμής αγοράς το κέρδος θα είναι 216 Ευρώ.

Τα πιο πάνω ποσά είναι ανάλογα και έτσι έχουμε:

$$x = 100 \cdot \frac{216}{18}.$$

Άρα  $x = 1.200$  Ευρώ.

#### 4. Μερισμός

*Μερισμός* ονομάζεται ο χωρισμός ενός ποσού (αριθμού) σε μέρη σύμφωνα με τα δεδομένα μιας σειράς αριθμών διάφορων μεταξύ τους. Τα μέρη που θα προκύψουν από τον μερισμό ενός ποσού μπορεί να είναι ευθέως ή αντιστρόφως ανάλογα με τους δεδομένους κάθε φορά αριθμούς.

Δυο ή περισσότεροι αριθμοί ονομάζονται *ανάλογοι* προς δυο ή περισσότερους αριθμούς αντίστοιχα, αν οι πρώτοι προκύπτουν από τους δεύτερους όταν αυτοί πολλαπλασιαστούν επί τον ίδιο αριθμό. Για παράδειγμα οι αριθμοί 3, 27, 36, 45 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 1, 9, 12, 15 διότι οι πρώτοι προκύπτουν από τους δεύτερους αν αυτοί πολλαπλασιαστούν επί 3. Το ίδιο συμβαίνει και από την άλλη πλευρά, δηλαδή οι δεύτεροι αριθμοί προκύπτουν από τους πρώτους αν αυτοί πολλαπλασιαστούν επί τον ίδιο αριθμό, το  $1/3$ .

Έτσι βλέπουμε ότι ισχύει:

$$\frac{3}{1} = \frac{27}{9} = \frac{36}{12} = \frac{45}{15} = 3.$$

Γενικά αν οι αριθμοί  $a, b, c, d$  είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς  $x, y, z, w$ , αντίστοιχα, τότε ισχύει:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{d}{w} = k$$

Οπότε

$$a = k \cdot x, \quad b = k \cdot y, \quad c = k \cdot z, \quad d = k \cdot w.$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο λόγος των ομολόγων αριθμών είναι ο ίδιος για όλους, και αυτός είναι ο  $k$ .

Δυο ή περισσότεροι αριθμοί ονομάζονται *αντιστρόφως ανάλογοι* προς δυο ή περισσότερους αριθμούς αντίστοιχα, αν και μόνον αν, οι πρώτοι είναι ανάλογοι προς τους αντίστροφους των δεύτερων. Για παράδειγμα οι αριθμοί 8, 20, 28, 40, 60 είναι αντιστρόφως ανάλογοι προς τους αριθμούς  $1/2, 1/5, 1/7, 1/10$  και  $1/15$ , αφού είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 2, 5, 7, 10 και 15 που είναι οι αντίστροφοι των δεύτερων αριθμών.

Ένα ποσό  $K$  που πρόκειται να μεριστεί (χωριστεί σε μέρη), ονομάζεται *μεριστέος*. Αν θέλουμε να μερίσουμε τον αριθμό  $K$  σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , τότε τον διαιρούμε δια του αθροίσματος αυτών και πολλαπλασιάζουμε το πηλίκο επί κάθε επιμέρους αριθμό χωριστά.

Συνεπώς ο μεριστέος  $K$  θα μεριστεί σε τρία μέρη ως εξής:

$$(i) \frac{K}{a+b+c} \cdot a.$$

$$(ii) \frac{K}{a+b+c} \cdot b.$$

$$(iii) \frac{K}{a+b+c} \cdot c.$$

Το πηλίκο  $\frac{K}{a+b+c}$  ονομάζεται *συντελεστής μερισμού*.

Στήν περίπτωση που θέλουμε να μερίσουμε ένα ποσό  $K$  σε μέρη αντίστροφως ανάλογα προς μια δοσμένη σειρά αριθμών  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , τότε πρέπει το  $K$  να μεριστεί σε μέρη ανάλογα προς τους αντίστροφους αριθμούς αυτών, δηλαδή τους  $1/a$ ,  $1/b$ ,  $1/c$  και κάνουμε τα εξής:

α) Κάνουμε τους αριθμούς  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$ ,  $\frac{1}{c}$  ομώνυμα κλάσματα.

β) Μεριζούμε το  $K$  ανάλογα με τους αριθμητές των πιο πάνω κλασμάτων και έχουμε:

$$(i) \frac{K}{ab+ac+bc} \cdot bc.$$

$$(ii) \frac{K}{ab+ac+bc} \cdot ac.$$

$$(iii) \frac{K}{ab+ac+bc} \cdot ab.$$

Τελειώνοντας να πούμε ότι ένας αριθμός (ποσό) μπορεί να μεριστεί σε μέρη ανάλογα περισσότερων δεδομένων σειρών αριθμών.

**Παράδειγμα.** Να μεριστεί το ποσό των 800 Ευρώ στους αριθμούς 4, 7 και 9.

Ο συντελεστής μερισμού είναι:  $\frac{800}{4+7+9} = 40$ . Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό αυτό επί κάθε ένα από τους 4, 7 και 9 και παίρνουμε:

$$(i) 40 \cdot 4 = 160.$$

$$(ii) 40 \cdot 7 = 280.$$

$$(iii) 40 \cdot 9 = 360.$$



Άρα το ποσό των 800 Ευρώ μερίζεται στα ποσά 160 Ευρώ, 280 Ευρώ και 360 Ευρώ που είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 4, 7 και 9 αφού προκύπτουν από αυτούς αν τους πολλαπλασιάσουμε επί 40.

**Παράδειγμα.** Ένας γονιός θέλει να μοιράσει στα τρία παιδιά του 25.200 Ευρώ, ανάλογα προς την ηλικία κάθε ενός από αυτά που είναι ως εξής: το 1ο είναι 16 ετών, το 2ο είναι 19 ετών και το 3ο είναι 21. Να υπολογιστεί το ποσό που θα πάρει κάθε παιδί.

Προσθέτουμε τις ηλικίες των παιδιών και έχουμε:  $16 + 19 + 21 = 56$ . Έτσι μερίζουμε τα 25.200 Ευρώ ανάλογα προς τις ηλικίες των παιδιών και παίρνουμε:

(i) Το πρώτο παιδί θα πάρει

$$\frac{25.200}{56} \cdot 16 = 7.200,$$

(ii) Το δεύτερο παιδί θα πάρει

$$\frac{25.200}{56} \cdot 19 = 8.550,$$

(iii) Το τρίτο παιδί θα πάρει

$$\frac{25.200}{56} \cdot 21 = 9.450.$$

**Παράδειγμα.** Να μεριστεί το ποσό των 690 Ευρώ σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα προς τους αριθμούς 4, 5 και 8.

Οι αντίστροφοι αριθμοί των 4, 5, 8 είναι οι αριθμοί  $1/4$ ,  $1/5$ ,  $1/8$  και αφού κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα έχουμε:  $20/80$ ,  $16/80$ ,  $10/80$ . Έτσι μερίζουμε το ποσό των 690 Ευρώ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 20, 16 και 10. Οπότε έχουμε:

(i)  $\frac{690}{20+16+10} \cdot 20 = 300$  Ευρώ,

(ii)  $\frac{690}{20+16+10} \cdot 16 = 240$  Ευρώ,

(iii)  $\frac{690}{20+16+10} \cdot 10 = 150$  Ευρώ.

**Παράδειγμα.** Ένας πατέρας άφησε στη διαθήκη του 126.000 Ευρώ να μοιραστούν στα τρία παιδιά του με τρόπο αντιστρόφως ανάλογο προς

την ηλικία που θα έχει κάθε ένα παιδί, όταν αυτός αποβιώσει. Αν κατά την εκτέλεση της διαθήκης τα παιδιά ήταν 12, 20 και 24 ετών αντίστοιχα, να υπολογιστεί το ποσό που θα εισπράξει κάθε ένα.

Πρέπει να μερίσουμε τα 126.000 Ευρώ σε ποσά ανάλογα προς τους αριθμούς:  $1/12$ ,  $1/20$  και  $1/24$ , που κάνουντάς τους ομώνυμα κλάσματα έχουμε:  $10/120$ ,  $6/120$ ,  $5/120$ . Τώρα μερίζουμε τα 126.000 Ευρώ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 10, 6, 5.

$$(i) \frac{126.000}{10+6+5} \cdot 10 = 60.000 \text{ Ευρώ,}$$

$$(ii) \frac{126.000}{10+6+5} \cdot 6 = 36.000 \text{ Ευρώ,}$$

$$(iii) \frac{126.000}{10+6+5} \cdot 5 = 30.000 \text{ Ευρώ.}$$

Άρα το μεγαλύτερο παιδί θα πάρει 30.000 Ευρώ, το δεύτερο θα πάρει 36.000 Ευρώ και το τρίτο θα πάρει 60.000 Ευρώ.

**Παράδειγμα.** Η υποτροφία για τους τρεις πρώτους επιτυχόντες στο Τμήμα Λογιστικής του ΤΕΙ Ηπείρου ανέρχεται στα 3.220 Ευρώ και πρέπει να δοθεί σ' αυτούς ανάλογα με τη βαθμολογία τους, η οποία είναι κατά μέσο όρο 16, 15,4 και 14,6 αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το ποσό που δικαιούται κάθε υπότροφος.

Κατ' αρχάς προσθέτουμε τις βαθμολογίες και έχουμε:  $16 + 15,4 + 14,6 = 46$ . Κατόπιν διαιρούμε το μεριστέο ποσό, 3.220 δια 46 και έχουμε:  $\frac{3.220}{46} = 70$ .

Κατά συνέπεια ο πρώτος δικαιούται:  $70 \cdot 16 = 1.120$ , ο δεύτερος δικαιούται:  $70 \cdot 15,4 = 1.078$  και ο τρίτος δικαιούται:  $70 \cdot 14,6 = 1.022$  Ευρώ.

## 5. Εταιρείες

Όταν δυο ή περισσότερα άτομα συμφωνούν εγγράφως και αναλαμβάνουν την υποχρέωση να αναπτύξουν από κοινού μια επιχειρηματική δραστηριότητα, καταβάλλοντας κάποιο χρηματικό ποσό έκαστος, λέμε ότι δημιούργησαν μια *εταιρεία*. Η δίκαιη διανομή των κερδών ή ζημιών μιας εταιρείας στους μετόχους της (εταίρους), γίνεται με τη μέθοδο του μερισμού που αναπτύξαμε πιο πάνω.

Γενικά όταν μιλάμε για προβλήματα εταιρειών εννοούμε τον μερισμό μεταξύ των μετόχων, του κέρδους ή της ζημιάς, ανάλογα προς τα κεφάλαια που έχει καταβάλλει κάθε ένας από αυτούς, καθώς και προς τους

χρόνους που τα κεφάλαια αυτά καταβλήθησαν στην εταιρεία. Για κάθε εταιρεία δημιουργείται ένα καταστατικό, όπου καταγράφονται οι τρόποι διανομής των κερδών ή ζημιών της εταιρείας, οι υποχρεώσεις των εταιρών, οι τρόποι λειτουργίας της εταιρείας κ.α. Σε περίπτωση που στο καταστατικό κάποιας εταιρείας δεν αναφέρεται ο τρόπος κατανομής των κερδών, ζημιών ή άλλων περιουσιακών στοιχείων αυτής, τότε ο μερισμός γίνεται ως ακολούθως:

1) *Άνισα κεφάλαια - ίσα χρονικά διαστήματα*: ανάλογα προς το μετοχικό κεφάλαιο που κατέβαλλε κάθε μέτοχος και για ίδιο χρονικό διάστημα για κάθε έναν από αυτούς.

2) *Ίσα κεφάλαια - άνισα χρονικά διαστήματα*: ανάλογα προς τα χρονικά διαστήματα, που ίδια κεφάλαια για κάθε εταίρο παρέμειναν στην εταιρεία.

3) *Άνισα κεφάλαια - άνισα χρονικά διαστήματα*: ανάλογα προς τα γινόμενα των κεφαλαίων που κατέβαλλε κάθε εταίρος επί το χρονικό διάστημα που αυτά παρέμειναν στη διάθεση της εταιρείας.

**Παράδειγμα.** Τρεις φίλοι, ο Νίκος, ο Κώστας και ο Ηλίας, αποφάσισαν να ιδρύσουν μια εταιρεία εισαγωγής και εμπορίας ζυλείας. Ο Κώστας κατέβαλλε στην εταιρεία 40.000 Ευρώ, ο Νίκος κατέβαλλε 35.000 Ευρώ και ο Ηλίας κατέβαλλε 45.000 Ευρώ. Μετά από επιχειρηματικές δραστηριότητες έξι μηνών η εταιρεία πραγματοποίησε καθαρά κέρδη 30.000 Ευρώ. Να μεριστούν τα κέρδη στους μετόχους της εταιρείας ανάλογα προς το ποσό που κατέβαλλε κάθε ένας αρχικά.

Εδώ έχουμε ίδιο χρονικό διάστημα για κάθε εταίρο, αλλά διαφορετικά (άνισα) αρχικά κεφάλαια. Έτσι πρέπει να μεριστεί ο αριθμός 30 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 40, 35 και 45. Άρα έχουμε:  $40 + 35 + 45 = 120$ .

$$(i) \frac{30}{120} \cdot 40 = 10, \text{ δηλαδή ο Νίκος θα πάρει } 10.000 \text{ Ευρώ.}$$

$$(ii) \frac{30}{120} \cdot 35 = 8,75, \text{ δηλαδή ο Κώστας θα πάρει } 8.750 \text{ Ευρώ.}$$

$$(iii) \frac{30}{120} \cdot 45 = 11,25, \text{ δηλαδή ο Ηλίας θα πάρει } 11.250 \text{ Ευρώ.}$$

**Παράδειγμα.** Ο κ. Γεωργίου ξεκίνησε, πριν από 4 μήνες μια επιχείρηση, με αρχικό κεφάλαιο 60.000 Ευρώ και σήμερα βάζει συνεταίρο του τον κ. Ανδρέου, ο οποίος καταβάλλει στην επιχείρηση κεφάλαιο 60.000 Ευρώ. Αν μετά από 8 μήνες η επιχείρηση Γεωργίου-Ανδρέου

έχει καθαρά κέρδη 68.000 Ευρώ, να μεριστεί το ποσό αυτό στους δυο συνεταίρους.

Αφού ο κ. Ανδρέου κατέβαλλε μετοχικό κεφάλαιο στην επιχείρηση ίσο με αυτό του κ. Γεωργίου, μετά από τέσσερις μήνες ακριβώς, ο μερισμός θα γίνει ανάλογα προς το χρόνο που τα κεφάλαια χρησιμοποιήθηκαν στην επιχείρηση. Δηλαδή 12 μήνες για τον πρώτο εταίρο και  $12 - 4 = 8$  για το δεύτερο. Έτσι έχουμε:

$$(i) \frac{68.000}{12+8} \cdot 12 = 40.800, \text{ δηλαδή ο κ. Γεωργίου θα πάρει } 40.800 \text{ Ευρώ.}$$

$$(ii) \frac{68.000}{12+8} \cdot 8 = 27.200, \text{ δηλαδή ο κ. Ανδρέου θα πάρει } 27.200 \text{ Ευρώ.}$$

**Παράδειγμα.** Ξεκίνησε κάποιος μια επιχείρηση με αρχικό κεφάλαιο 100.000 Ευρώ και μετά από έξι μήνες έβαλε συνεταίρο, ο οποίος κατέβαλλε στην επιχείρηση κεφάλαιο ίσο με τα  $\frac{2}{5}$  του πρώτου εταίρου. Έξι μήνες μετά τον δεύτερο συνεταίρο, προσλήφθηκε και τρίτος που κατέβαλλε κεφάλαιο ίσο με τα  $\frac{5}{4}$  του κεφαλαίου που κατέβαλλε ο δεύτερος εταίρος. Ένα έτος μετά την πρόσληψη του δεύτερου εταίρου, η επιχείρηση παρουσίασε κέρδη 80.000 Ευρώ που πρέπει να διανεμηθούν και στους τρεις συνεταίρους. Να γίνει ο μερισμός των κερδών στους μετόχους της εταιρείας.

Αν Α, Β και Γ είναι αντίστοιχα οι τρεις συνεταίροι με τη σειρά που μπήκαν στην επιχείρηση, έχουμε ότι:

Ο Α διέθεσε κεφάλαιο 100.000 Ευρώ για  $12 + 6 = 18$  μήνες.

Ο Β διέθεσε κεφάλαιο  $100.000 \cdot \frac{2}{5} = 40.000$  Ευρώ για 12 μήνες.

Ο Γ διέθεσε κεφάλαιο  $40.000 \cdot \frac{5}{4} = 50.000$  Ευρώ για  $12 - 6 = 6$  μήνες.

Αφού τα κεφάλαια και οι χρόνοι που αυτά διατέθηκαν στην επιχείρηση είναι άνισα μεταξύ τους, ο μερισμός των κερδών στους μετόχους θα γίνει ανάλογα προς τα ποσά πολλαπλασιασμένα επί τους αντίστοιχους χρόνους. Έτσι έχουμε:

$$\text{Για τον Α: } 100.000 \cdot 18 = 1.800.000.$$

$$\text{Για τον Β: } 40.000 \cdot 12 = 480.000.$$

$$\text{Για τον Γ: } 50.000 \cdot 6 = 300.000.$$

Συνεπώς τα μερίσματα για τους τρεις εταίρους θα είναι:

(i)

$$\frac{80.000}{1.800.000 + 480.000 + 300.000} \cdot 1.800.000 = 55.813,95,$$

δηλαδή ο Α θα πάρει 55.813,95 Ευρώ.

(ii)

$$\frac{80.000}{1.800.000 + 480.000 + 300.000} \cdot 480.000 = 14.883,72,$$

δηλαδή ο Β θα πάρει 14.883,72 Ευρώ.

(iii)

$$\frac{80.000}{1.800.000 + 480.000 + 300.000} \cdot 300.000 = 9.302,33,$$

δηλαδή ο Γ θα πάρει 9.302,33 Ευρώ.

## 6. Υπολογισμός του μερίσματος των κερδών μιας εταιρείας με το *Excel*

Στις παρακάτω εφαρμογές γίνεται υπολογισμός του μερίσματος των κερδών μιας εταιρείας, όταν δίνονται σ' ένα πρόβλημα μέχρι και τέσσερις μέτοχοι. Τα προγράμματα αυτά εύκολα μπορούν να επεκταθούν και για μεγαλύτερο αριθμό μετόχων.

### 6.1 Άνισα κεφάλαια - ίσα χρονικά διαστήματα.

**Παράδειγμα.** Το κέρδος 13500 Ευρώ μιας εταιρείας πρέπει να μεριστεί στους τέσσερις μετόχους της, οι οποίοι κατέβαλλαν ταυτόχρονα σε αυτήν τα εξής αρχικά κεφάλαια: 12000 ο πρώτος, 10000 ο δεύτερος, 8000 ο τρίτος και 6000 Ευρώ ο τέταρτος μέτοχος αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το ποσό του κέρδους που πρέπει να λάβει κάθε ένας από αυτούς.

Επιλέγουμε το αρχείο του *Excel* που βρίσκεται στον κατάλογο: “*Εταιρείες*” με τίτλο: “*Άνισα ποσά ίσοι χρόνοι*”.

Στη συνέχεια εισάγουμε (Εικόνα 1.1) στο κελί A1 το κέρδος (π.χ. 13500), στο κελί B1 το αρχικό κεφάλαιο του πρώτου μετόχου (π.χ.

12000), στο κελί *B2* το αρχικό κεφάλαιο του δεύτερου μετόχου (π.χ. 10000), στο κελί *B3* το αρχικό κεφάλαιο του τρίτου μετόχου (π.χ. 8000) και στο κελί *B4* το αρχικό κεφάλαιο του τέταρτου μετόχου (π.χ. 6000).

Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στα κελιά *C1*, *C2*, *C3* και *C4* θα δούμε τα αποτελέσματα 4500, 3750, 3000 και 2250, που είναι τα κέρδη που θα λάβουν οι τέσσερις μέτοχοι της εταιρείας.

Ο υπολογισμός των μερισμάτων στα κελιά *C1*, *C2*, *C3* και *C4* έγινε στο *Excel* με χρήση των τύπων :

$$= A1 * B_i / \text{SUM}(B1 : B4), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	13500	12000	4500				
2		10000	3750				
3		8000	3000				
4		6000	2250				
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							

Εικόνα 1.1

## 6.2 Ίσα κεφάλαια - άνισα χρονικά διαστήματα.

**Παράδειγμα.** Το κέρδος 18600 Ευρώ μιας εταιρείας πρέπει να μεριστεί στους τέσσερις μετόχους της, οι οποίοι κατέβαλλαν σε αυτήν ίσα

αρχικά κεφάλαια, αλλά σε διαφορετικούς χρόνους μεταξύ τους, ήτοι: ο πρώτος είχε συμμετοχή 24 μήνες στην εταιρεία, ο δεύτερος 18 μήνες, ο τρίτος 12 μήνες και ο τέταρτος 8 μήνες. Να υπολογιστεί το ποσό του κέρδους που πρέπει να λάβει κάθε ένας από αυτούς.

Επιλέγουμε το αρχείο του *Excel* με τίτλο: “*Τσα ποσά άνοισι χρόνοι*” που βρίσκεται στον κατάλογο: “*Εταιρείες*”

	A	B	C	D	E	F	G
1	18600	24	7200		μέρισμα πρώτου εταίρου		
2		18	5400		μέρισμα δεύτερου εταίρου		
3		12	3600		μέρισμα τρίτου εταίρου		
4		8	2400		μέρισμα τέταρτου εταίρου		
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							

**Εικόνα 1.2**

Στη συνέχεια εισάγουμε (Εικόνα 1.2) στο κελί *A1* το κέρδος (π.χ. 18600), στο κελί *B1* το χρόνο συμμετοχής του πρώτου μετόχου (π.χ. 24 μήνες), στο κελί *B2* το χρόνο συμμετοχής του δεύτερου μετόχου (π.χ. 18 μήνες), στο κελί *B3* το χρόνο συμμετοχής του τρίτου μετόχου (π.χ. 12 μήνες) και στο κελί *B4* το χρόνο συμμετοχής του τέταρτου μετόχου (π.χ. 8 μήνες).

Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στα κελιά *C1*, *C2*, *C3* και *C4* θα δούμε τα αποτελέσματα 7200, 5400, 3600 και 2400 που είναι

τα κέρδη που θα λάβουν οι τέσσερις μέτοχοι της εταιρείας.

Ο υπολογισμός των μερισμάτων στα κελιά C1, C2, C3 και C4 έγινε στο Excel με χρήση των τύπων :

$$= A1 * Bi / SUM(B1 : B4), i = 1, 2, 3, 4.$$

### 6.3 Άνισα κεφάλαια - άνισα χρονικά διαστήματα.

**Παράδειγμα.** Το κέρδος 25500 Ευρώ μιας εταιρείας πρέπει να μεριστεί στους τέσσερις μετόχους της, οι οποίοι κατέβαλλαν σε αυτήν αρχικά κεφάλαια 12000, 10000, 8000 και 6000 Ευρώ ο καθένας, αλλά σε διαφορετικούς χρόνους μεταξύ τους, ήτοι: ο πρώτος είχε συμμετοχή 24 μήνες στην εταιρεία, ο δεύτερος 18 μήνες, ο τρίτος 12 μήνες και ο τέταρτος 8 μήνες. Να υπολογιστεί το ποσό του κέρδους που πρέπει να λάβει κάθε ένας από αυτούς.

	A	B	C	D	E	F	G
1	25500	12000	24	12000		μέρισμα πρώτου εταίρου	
2		10000	18	7500		μέρισμα δεύτερου εταίρου	
3		8000	12	4000		μέρισμα τρίτου εταίρου	
4		6000	8	2000		μέρισμα τέταρτου εταίρου	
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							

Εικόνα 1.3



Επιλέγουμε το αρχείο του *Excel* με τίτλο: “Άνισα ποσά ανίσοι χρόνοι” που βρίσκεται στον κατάλογο: “Εταιρείες”.

Στη συνέχεια εισάγουμε (Εικόνα 1.3) :

1) στο κελί *A1* το κέρδος (π.χ. 25500),

2) στο κελί *B1* το αρχικό κεφάλαιο του πρώτου μετόχου (π.χ. 12000), στο κελί *B2* το αρχικό κεφάλαιο του δεύτερου μετόχου (π.χ. 10000), στο κελί *B3* το αρχικό κεφάλαιο του τρίτου μετόχου (π.χ. 8000) και στο κελί *B4* το αρχικό κεφάλαιο του τέταρτου μετόχου (π.χ. 6000),

3) στο κελί *C1* το χρόνο συμμετοχής του πρώτου μετόχου (π.χ. 24 μήνες), στο κελί *C2* το χρόνο συμμετοχής του δεύτερου μετόχου (π.χ. 18 μήνες), στο κελί *C3* το χρόνο συμμετοχής του τρίτου μετόχου (π.χ. 12 μήνες) και στο κελί *C4* το χρόνο συμμετοχής του τέταρτου μετόχου (π.χ. 8 μήνες).

Στη συνέχεια μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στα κελιά *D1*, *D2*, *D3* και *D4* θα δούμε τα αποτελέσματα 12000, 7500, 4000 και 2000, που είναι τα κέρδη που θα λάβουν οι τέσσερις μέτοχοι της εταιρείας.

Ο υπολογισμός των μερισμάτων στα κελιά *D1*, *D2*, *D3* και *D4* έγινε στο *Excel* με χρήση των τύπων:

$$= A1 * B_i * C_i / (B1 * C1 + B2 * C2 + B3 * C3 + B4 * C4). \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

**Σημείωση.** Για περισσότερες πληροφορίες της χρήσης των Η/Υ στη διδασκαλία των Μαθηματικών μπορεί ο αναγνώστης να δει το πολύ καλό βιβλίο των Τουμάση - Αρβανίτη (βλέπε [44]).

## Ασκήσεις

1. Ο αντιπρόσωπος της “ ΝΙΣΣΑΝ Α.Ε.” στην Πάτρα πούλησε φορτηγάκι  $4 \times 4$ , του οποίου η αξία αγοράς ήταν 18.000 Ευρώ, με κέρδος 28%. Πόσα χρήματα πλήρωσε ο πελάτης και πόσα κέρδισε ο αντιπρόσωπος;

**Λύση.** Κάνουμε την κατάταξη ως εξής:

Σε αξία αγοράς 100 Ευρώ, 28 Ευρώ κέρδος, και εισπράττει 128 Ευρώ.

Σε αξία αγοράς 18.000 Ευρώ,  $x_1$ ; Ευρώ κέρδος, και εισπράττει  $x_2$ ; Ευρώ.

Τα πιο πάνω ποσά είναι ανάλογα και έτσι έχουμε:

$$x_1 = 28 \cdot \frac{18.000}{100} = 5.040,$$

δηλαδή ο αντιπρόσωπος θα κερδίσει 5.040 Ευρώ και ο πελάτης θα καταβάλει:

$$x_2 = 128 \cdot \frac{18.000}{100} = 23.040$$

ή

$$18.000 + 5.040 = 23.040.$$

2. Ο κ. Χρήστου άρχισε εμπορική επιχείρηση με αρχικό κεφάλαιο 80.000 Ευρώ. Μετά από τέσσερις μήνες έβαλε συνεταίρο του τον κ. Πολίτη, ο οποίος κατέβαλλε στην επιχείρηση κεφάλαιο ίδιο με αυτό του κ. Χρήστου. Οκτώ μήνες αργότερα μπήκε συνεταίρος και ο κ. Αντωνίου, ο οποίος τοποθέτησε ποσό ίδιο με τους άλλους δυο εταίρους. Αν το κέρδος της επιχείρησης, ένα έτος μετά την πρόσληψη του κ. Αντωνίου ήταν 11.200 Ευρώ, πόσα χρήματα εισέπραξε κάθε ένας;

**Λύση.** Έχουμε ότι:

Το κεφάλαιο του κ. Χρήστου έμεινε στην επιχείρηση 2 έτη ή 24 μήνες.

Το κεφάλαιο του κ. Πολίτη έμεινε στην επιχείρηση  $24 - 4 = 20$  μήνες.

Το κεφάλαιο του κ. Αντωνίου έμεινε στην επιχείρηση 1 έτος ή 12 μήνες.

Αφού και οι τρεις εταίροι τοποθέτησαν ίδιο αρχικό κεφάλαιο, το κέρδος πρέπει να μεριστεί σ' αυτούς ανάλογα προς το χρονικό διάστημα που τα κεφάλαιά τους έμειναν στην επιχείρηση, δηλαδή ανάλογα προς τους αριθμούς 24, 20 και 12, το άθροισμα των οποίων είναι 56.

Άρα:

$$\text{ο κ. Χρήστου θα εισπράξει: } \frac{11.200 \cdot 24}{56} = 4.800,$$

$$\text{ο κ. Πολίτης θα εισπράξει: } \frac{11.200 \cdot 20}{56} = 4.000,$$

$$\text{ο κ. Αντωνίου θα εισπράξει: } \frac{11.200 \cdot 12}{56} = 2.400.$$

**3.** Τέσσερα μέτρα βαμβακερού υφάσματος κοστίζουν 105 Ευρώ. Πόσα χρήματα θα πληρώσει ένας ράπτης που χρειάζεται 7,5 μέτρα από το ίδιο ύφασμα; (Απ. 196,88 Ευρώ).

**4.** Ένα τρένο, κινούμενο με σταθερή ταχύτητα 90 χιλιόμετρα την ώρα, χρειάστηκε 2 ώρες και 20 λεπτά να φτάσει από την Πάτρα στην Αθήνα. Αν η ταχύτητα ήταν 100 χιλιόμετρα την ώρα, σε πόσο χρόνο θα έφτανε το τρένο; (Απ. 2 ώρες και 6 λεπτά).

**5.** Για τη μεταφορά 1.200 τόνων αμμοχάλικου στη ζεύξη Ρίου-Αντιρρίου εργάστηκαν 8 φορτηγά, ίδιας χωρητικότητας και απόδοσης, για 18 ημέρες με δωρη καθημερινή εργασία. Πόσες ημέρες θα έπρεπε να εργαστούν 12 φορτηγά, ίδια με τα πιο πάνω, για τη συγκεκριμένη μεταφορά, αν εργάζονταν έξι ώρες ημερησίως; (Απ. 16 ημέρες).

**6.** Ένας manάβης αγόρασε 20 κιλά μήλα και πλήρωσε 24 Ευρώ, για την ίδια ποσότητα πορτοκαλιών πλήρωσε 25 Ευρώ. Πουλώντας και τα δύο είδη φρούτων εισέπραξε από τα μήλα 43,2 Ευρώ και από τα πορτοκάλια 42,5 Ευρώ. Πιο ήταν το ποσοστό κέρδους από τα μήλα και πιο από τα πορτοκάλια; (Απ. 80% από τα μήλα και 70% από τα πορτοκάλια).

**7.** Για να γίνει ένα έργο απασχολήθηκαν τέσσερις εργαζόμενοι Α, Β, Γ και Δ ως εξής: Ο πρώτος 10 ημέρες με 6 ώρες ημερησίως, ο δεύτερος 6 ημέρες με 8 ώρες ημερησίως, ο τρίτος 8 ημέρες με 6 ώρες ημερησίως και ο τέταρτος 4 ημέρες με 10 ώρες εργασία την ημέρα. Αν η συνολική αμοιβή ήταν 2.254 Ευρώ και για τους τέσσερις εργαζόμενους,

να γίνει ο μερισμός του ποσού αυτού ανάλογα προς τις ημέρες και τις ώρες απασχόλησης κάθε εργαζόμενου. (Απ. 690 Ευρώ ο Α, 552 Ευρώ ο Β και ο Γ, 460 Ευρώ ο Δ).

**8.** Για το στήσιμο μιας επιχείρησης ο Γιάννης κατέβαλλε 20.000 Ευρώ και ο Νίκος κατέβαλλε 25.000 Ευρώ. Μετά από τρεις μήνες η επιχείρηση παρουσίασε ζημιές 1.800 Ευρώ που έπρεπε να καλυφτούν άμεσα από τους δυο μετόχους. Να γίνει ο μερισμός των ζημιών με τρόπο αντιστρόφως ανάλογο προς το αρχικό κεφάλαιο που κατέβαλλε κάθε εταίρος. (Απ. 1.000 Ευρώ θα καταβάλλει ο Γιάννης, και 800 Ευρώ ο Νίκος).

**9.** Κέρδη 125.000 Ευρώ διανεμήθηκαν στους τέσσερις μετόχους μιας εταιρείας ως ακολούθως: Ο πρώτος έλαβε 25.000 Ευρώ, ο δεύτερος 35.000 Ευρώ, ο τρίτος 45.000 Ευρώ και ο τέταρτος 20.000 Ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό που έλαβε κάθε ένας από τους μετόχους της εταιρείας. (Απ. 20%, 28%, 36% και 16% αντίστοιχα).

**10.** Αν στο πρόβλημα 8 πιο πάνω ξέρουμε ότι την επιχείρηση την ξεκίνησαν και οι τέσσερις μαζί οι μέτοχοι καταβάλλοντας αρχικό κεφάλαιο 300.000 Ευρώ, και ότι επί πλέον, τα κέρδη μερίζονται ανάλογα προς το αρχικό κεφάλαιο του κάθε εταίρου, να υπολογιστούν τα ποσά που κατέβαλλε κάθε ένας από αυτούς όταν έστησαν την εταιρεία. (Απ. 60.000 Ευρώ, 84.000 Ευρώ, 108.000 Ευρώ και 48.000 Ευρώ αντίστοιχα).

**11.** Ένας έμπορος πουλά τα εμπορεύματά του με κέρδος 15% επί της τιμής αγοράς και σε χρονικό διάστημα έξι μηνών έχει κάνει συνολικές πωλήσεις (ακαθάριστα έσοδα) 180.000 Ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσό των κερδών για το εξάμηνο, καθώς επίσης και το ποσοστό κερδών στην τιμή πώλησης των εμπορευμάτων. (Απ. 23.478, 26 και 13,04%).

**12.** Κάνοντας τη διαθήκη του ένας πατέρας, όρισε να διανεμηθεί το ποσό των 210.000 Ευρώ στα παιδιά του, Πέτρο 12 ετών, Αθηνά 14 ετών και Θανασάκη 6 ετών, μετά το θάνατό του, ανάλογα προς την ηλικία που θα έχει κάθε ένα από αυτά κατά την εκτέλεση της διαθήκης. Ο πατέρας απεβίωσε μετά από 24 έτη. Να υπολογιστεί το ποσό που θα λάβει κάθε παιδί. (Απ. 72.692 Ευρώ ο Πέτρος, 76.731 Ευρώ η Αθηνά και 60.577 Ευρώ ο Θανασάκης).

# Κεφάλαιο 2

## Απλός Τόκος

### 1. Βασικοί τύποι υπολογισμού του απλού τόκου

Απλό τόκο καλούμε τη διαδικασία τοκισμού χρημάτων κατά την οποία από χρονική περίοδο τοκισμού σε χρονική περίοδο τοκισμού ο δανειστής εισπράττει τον τόκο του αρχικού κεφαλαίου που έδωσε στον δανειζόμενο και αφήνει μόνο το αρχικό κεφάλαιο να τοκίζεται για κάθε επόμενη χρονική περίοδο τοκισμού. Ο δανειζόμενος με τη λήξη του δανείου οφείλει και επιστρέφει μόνο το αρχικό κεφάλαιο που δανείσθηκε.

**Πρόβλημα 1.** Κεφάλαιο  $K$  Ευρώ τοκίσθηκε με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο  $\varepsilon\%$  για  $n$  έτη. Να βρεθεί ο συνολικός τόκος που θα δώσει το κεφάλαιο αυτό στο τέλος των  $n$  ετών.

**Λύση.** Το επιτόκιο είναι  $\varepsilon\%$ . Οπότε το 1 Ευρώ για ένα έτος θα δώσει τόκο  $i = \frac{\varepsilon}{100}$ . Συνεπώς το κεφάλαιο των  $K$  Ευρώ για ένα έτος θα δώσει τόκο  $K \cdot i$

Οπότε το κεφάλαιο των  $K$  Ευρώ για  $n$  έτη θα δώσει τόκο:

$$I = K \cdot i + K \cdot i + \dots + K \cdot i \text{ (} n\text{-φορές)}$$

ή

$$I = K \cdot n \cdot i. \quad (1)$$

Η εξίσωση (1) αποτελεί τη **θεμελιώδη εξίσωση** του Απλού Τόκου (Απλή Κεφαλαιοποίηση).

**Παράδειγμα.** Κεφάλαιο 150 Ευρώ τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 5% για 4 έτη. Να βρεθεί ο συνολικός τόκος που θα δώσει