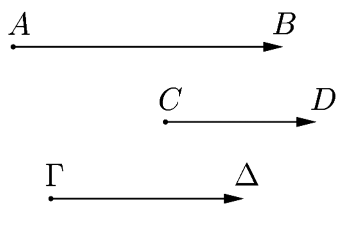
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Ι.1 Διανύσματα

1. Βασικές έννοιες επί των διανυσμάτων

Ένα διατεταγμένο ζεύγος (A, B) σημείων A και B του χώρου καλείται **εφαρμοστό διάνυσμα**(*) του χώρου και συμβολίζεται ως **AB**. Το σημείο A καλείται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** και το σημείο B **πέρας** ή **τέλος** του εφαρμοστού διανύσματος **AB**. Στο Σχήμα 1.1 δίνεται η γεωμετρική παράσταση εφαρμοστών διανυσμάτων του χώρου.



Σχήμα 1.1

(*) Ισοδύναμα ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με σταθερά άκρα είναι ένα εφαρμοστό διάνυσμα.

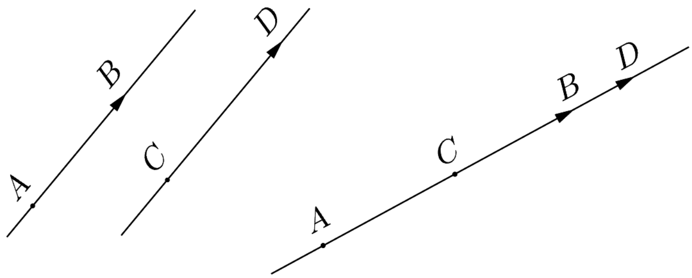
Έστω ε η ευθεία ή το επίπεδο Π του χώρου που διέρχεται από τα σημεία A και B. Τότε λέμε ότι το εφαρμοστό διάνυσμα **AB** **ανήκει** ή **κείται** στην ευθεία ε ή στο επίπεδο Π, αντίστοιχα.

Η ευθεία επί της οποίας κείται ένα εφαρμοστό διάνυσμα καλείται **φορέας** αυτού.

Αν η ευθεία, που διέρχεται από τα σημεία A και B, είναι παράλληλη προς μία ευθεία ε ή προς ένα επίπεδο Π, τότε λέμε ότι το εφαρμοστό διάνυσμα **AB** είναι **παράλληλο** προς την ευθεία ε ή προς το επίπεδο Π αντίστοιχα. Συμβολικά γράφουμε $\mathbf{AB} \| \varepsilon$ ή $\mathbf{AB} \| \Pi$.

Εφαρμοστά διανύσματα με παράλληλους φορείς καλούνται **παράλληλα**. Ενώ εφαρμοστά διανύσματα με τον ίδιο φορέα καλούνται **συγγραμμικά**.

Για να δηλώσουμε ότι τα εφαρμοστά διανύσματα **AB** και **CD** είναι παράλληλα ή συγγραμμικά γράφουμε $\mathbf{AB} \| \mathbf{CD}$. Σχήμα 1.2.

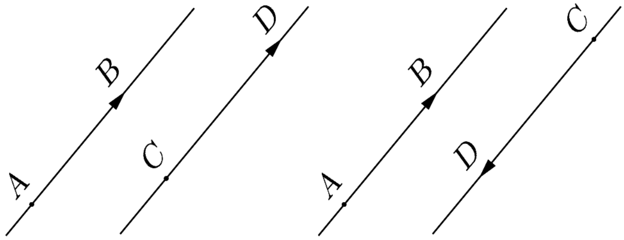


Σχήμα 1.2

Φορά ενός εφαρμοστού διανύσματος καλούμε την κατεύθυνση ενός κινητού που διατρέχει το διάνυσμα από την αρχή προς το τέλος του.

Παράλληλα εφαρμοστά διανύσματα με την ίδια φορά ονομάζονται **ομόρροπα**, ενώ με αντίθετη φορά καλούνται **αντίρροπα**.

Για να δηλώσουμε ότι τα εφαρμοστά διανύσματα **AB** και **CD** είναι ομόρροπα (αντίστοιχα, αντίρροπα) γράφουμε $\mathbf{AB} \uparrow\uparrow \mathbf{CD}$ (αντίστοιχα, $\mathbf{AB} \uparrow\downarrow \mathbf{CD}$). Σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3

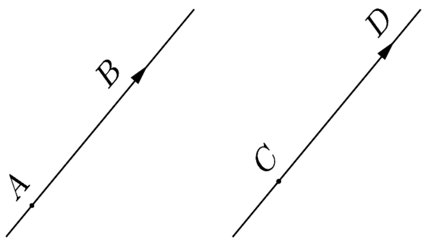
Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB ως προς μία μονάδα μήκους, καλείται **μήκος ή μέτρο** του εφαρμοστού διανύσματος $\mathbf{AB}$ ως προς τη μονάδα αυτή και συμβολίζεται με $|\mathbf{AB}|$. Αν $|\mathbf{AB}| = 1$, τότε το εφαρμοστό διάνυσμα $\mathbf{AB}$ καλείται **μοναδιαίο**. Επίσης, αν $\mathrm{A} \equiv B$, δηλαδή το Α συμπίπτει με το Β, τότε το εφαρμοστό διάνυσμα $\mathbf{AB}$ καλείται **μηδενικό** και συμβολίζεται με $\mathbf{0}$. Για το μηδενικό εφαρμοστό διάνυσμα έχουμε $|\mathbf{0}| = 0$.

Δύο εφαρμοστά διανύσματα θα λέμε ότι είναι **ίσα** αν έχουν:

(1) το ίδιο μέτρο,

(2) την ίδια φορά και

(3) την ίδια **διεύθυνση**, δηλαδή οι φορείς αυτών είναι παράλληλοι ή ταυτίζονται. Σχήμα 1.4.



Σχήμα 1.4

Δύο εφαρμοστά διανύσματα $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{CD}$ καλούνται **αντίθετα** αν έχουν το ίδιο μέτρο και είναι αντίρροπα. Δηλαδή

(1) $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{CD}|$ και

(2) $\mathbf{AB} \uparrow\downarrow \mathbf{CD}$.

Αν το εφαρμοστό διάνυσμα $\mathbf{AB}$ είναι αντίθετο του $\mathbf{CD}$, τότε γράφουμε: $\mathbf{AB} = -\mathbf{CD}$ ή $\mathbf{CD} = -\mathbf{AB}$. Προφανώς $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι:

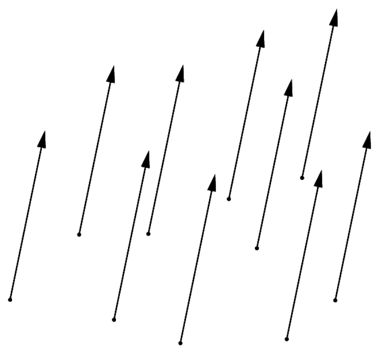
(1) $\mathbf{AB} = \mathbf{AB}$.

(2) Αν $\mathbf{AB} = \mathbf{CD}$, τότε $\mathbf{CD} = \mathbf{AB}$.

(3) Αν $\mathbf{AB} = \mathbf{CD}$ και $\mathbf{CD} = \mathbf{MN}$, τότε $\mathbf{AB} = \mathbf{MN}$.

Συνεπώς, η ισότητα των εφαρμοστών διανυσμάτων του χώρου είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των εφαρμοστών διανυσμάτων του χώρου.

Κάθε κλάση ισοδυναμίας, δηλαδή κάθε σύνολο αποτελούμενο από όλα τα εφαρμοστά διανύσματα του χώρου, που είναι ίσα μεταξύ τους, καλείται **ελεύθερο διάνυσμα** ή **διάνυσμα** του χώρου. Κάθε στοιχείο αυτού του συνόλου είναι ένα εφαρμοστό διάνυσμα και είναι ένας **αντιπρόσωπος** του ελεύθερου διανύσματος. Στο Σχήμα 1.5 φαίνονται μερικοί αντιπρόσωποι ενός ελεύθερου διανύσματος. Τα ελεύθερα διανύσματα τα συμβολίζουμε ως $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, κ.λπ.



Σχήμα 1.5

Κάθε εφαρμοστό διάνυσμα $\mathbf{AB}$ του χώρου ορίζει ένα ελεύθερο διάνυσμα, το οποίο είναι το σύνολο όλων των εφαρμοστών διανυσμάτων του χώρου, που είναι ίσα με το εφαρμοστό διάνυσμα $\mathbf{AB}$.

Η ισότητα $\mathbf{u} = \mathbf{AB}$ σημαίνει ότι το εφαρμοστό διάνυσμα $\mathbf{AB}$ ορίζει το ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{u}$.

Για τα ελεύθερα διανύσματα του χώρου έχουμε τα εξής:

(1) Θα λέμε ότι τα ελεύθερα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του χώρου είναι **παράλληλα** (αντίστοιχα, **ίσα**) αν από τις σχέσεις $\mathbf{u} = \mathbf{AB}$, και $\mathbf{v} = \mathbf{CD}$ προκύπτει ότι τα εφαρμοστά διανύσματα $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{CD}$ είναι παράλληλα (αντίστοιχα, ίσα).

(2) Θα λέμε ότι το ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{u} = \mathbf{AB}$ του χώρου είναι **παράλληλο** προς μία ευθεία ε ή προς ένα επίπεδο Π, όταν το εφαρμοστό διάνυσμα $\mathbf{AB}$ είναι **παράλληλο** προς την ευθεία ε ή προς το επίπεδο Π αντίστοιχα. Συμβολικά γράφουμε $\mathbf{u}||\varepsilon$ ή $\mathbf{u}||\Pi$.

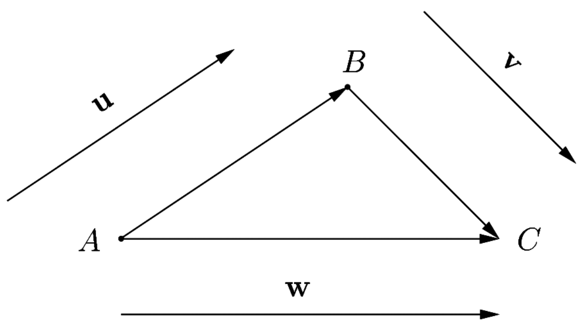
(3) Το σύνολο όλων των μηδενικών εφαρμοστών διανυσμάτων του χώρου είναι ένα ελεύθερο διάνυσμα του χώρου, το οποίο καλείται **μηδενικό ελεύθερο διάνυσμα** και συμβολίζεται ως $\mathbf{0}$.

(4) Για κάθε ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{u}$ του χώρου, το σύνολο όλων των εφαρμοστών διανυσμάτων $\mathbf{BA}$ του χώρου, για τα οποία $\mathbf{AB} = \mathbf{u}$ είναι, επίσης, ένα ελεύθερο διάνυσμα του χώρου. Το διάνυσμα αυτό συμβολίζεται ως $-\mathbf{u}$. Προφανώς, $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(5) Για κάθε ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{u}$ του χώρου και για κάθε σημείο A, υπάρχει μονοσημάντως ορισμένο σημείο B τέτοιο ώστε $\mathbf{AB} = \mathbf{u}$.

(6) Αν $\mathbf{u} = \mathbf{AB}$, τότε το μέτρο του $\mathbf{AB}$ καλείται **μέτρο** του $\mathbf{u}$.

Έστω $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ δύο ελεύθερα διανύσματα. Θεωρούμε δύο εφαρμοστά διανύσματα $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{BC}$ τέτοια ώστε: $\mathbf{AB} = \mathbf{u}$ και $\mathbf{BC} = \mathbf{v}$. Τότε το ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{w}$ που ορίζεται απο το $\mathbf{AC}$ καλείται **άθροισμα** των διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. Γράφουμε: $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{AC}$. Σχήμα 1.6.



Σχήμα 1.6

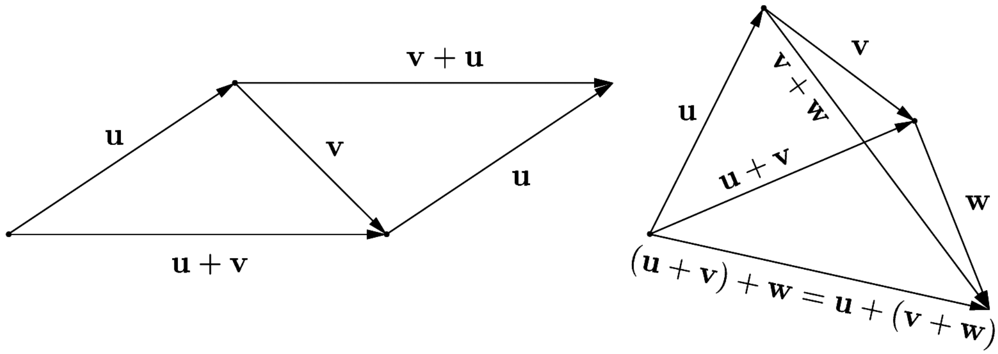
Η πρόσθεση των ελευθέρων διανυσμάτων αποδεικνύεται ότι έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ (αντιμεταθετική) (Σχήμα 1.7)

(2) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ (προσεταιριστική) (Σχήμα 1.7)

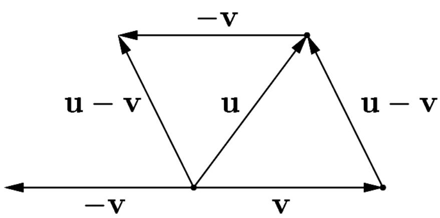
(3) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$

(4) $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=0$.



Σχήμα 1.7

Η **διαφορά** δύο ελευθέρων διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ ορίζεται με τη βοήθεια της πρόσθεσης ως εξής: $\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$. Σχήμα 1.8. Για τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $-\mathbf{u}$ έχουμε: $\mathbf{u}-\mathbf{u}=0$.



Σχήμα 1.8

Το **γινόμενο** ενός αριθμού $\lambda \in I\!R$ μ' ένα ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{u}=\mathbf{AB}$ είναι ένα ελεύθερο διάνυσμα που συμβολίζουμε με $\mathbf{w}=\lambda\mathbf{u}$ και ορίζεται από το εφαρμοστό διάνυσμα $\lambda\mathbf{AB}$, δηλαδή $\mathbf{w}=\lambda\mathbf{AB}$.

Το εφαρμοστό διάνυσμα $\lambda\mathbf{AB}$ έχει:

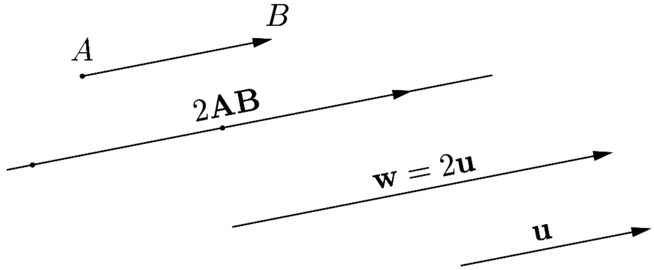
(1) μέτρο, $|\lambda|\ |\mathbf{AB}|$,

(2) διεύθυνση, τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{AB}$ και

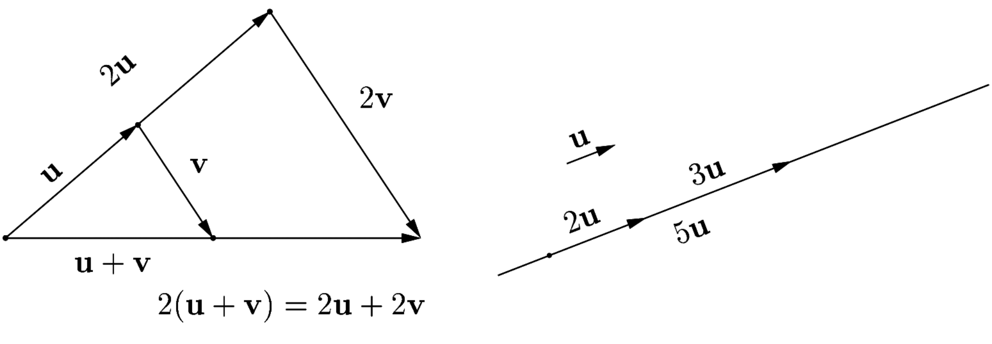
(3) φορά, τη φορά του διανύσματος $\mathbf{AB}$ όταν $\lambda > 0$ και αντίθετη του διανύσματος $\mathbf{AB}$ όταν $\lambda < 0$.

Αν $\lambda = 0$ ή $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, τότε είναι $\lambda\mathbf{AB} = \mathbf{0}$.

Στο Σχήμα 1.9 δίνουμε την παράσταση του διανύσματος $\mathbf{w} = 2\mathbf{u}$.



Σχήμα 1.9



Σχήμα 1.10

Ο πολλαπλασιασμός αριθμού με ελεύθερο διάνυσμα αποδεικνύεται ότι έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ (Σχήμα 1.10, για $\lambda = 2$)

(2) $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$ (Σχήμα 1.10, για $\lambda = 2$ και $\mu = 3$)

(3) $(\lambda\mu)\mathbf{u} = \lambda(\mu\mathbf{u})$

(4) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Τέλος, αποδεικνύεται ότι δύο μη μηδενικά ελεύθερα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι παράλληλα τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει $\lambda \in I\!R$ έτσι ώστε:

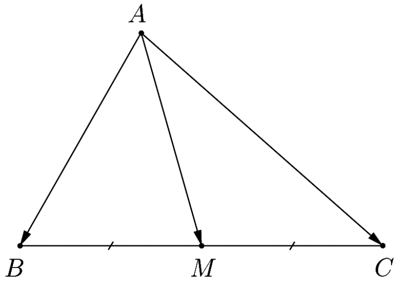
$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$.

Εφαρμογές.

(1) Δίνεται τρίγωνο ABC και M το μέσο της πλευράς BC του τριγώνου. Να αποδειχθεί ότι: $2\mathbf{AM} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$. (Σχήμα 1.11).

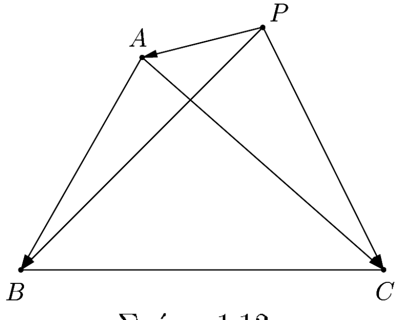
Έχουμε ότι $\mathbf{AM} = \mathbf{AB} + \mathbf{BM}$ και $\mathbf{AM} = \mathbf{AC} + \mathbf{CM}$. Οπότε:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{AM} &= \mathbf{AB} + \mathbf{BM} + \mathbf{AC} + \mathbf{CM} \\ &= \mathbf{AB} + \mathbf{AC} + \mathbf{BM} + (-\mathbf{BM}) \\ &= \mathbf{AB} + \mathbf{AC}. \end{aligned}$$



Σχήμα 1.11

(2) Δίνεται τρίγωνο ABC και P τυχόν σημείο του επιπέδου του τριγώνου. Να αποδειχθεί ότι το εφαρμοστό διάνυσμα $\mathbf{PA} + \mathbf{PB} - 2\mathbf{PC}$ είναι σταθερό.



Σχήμα 1.12

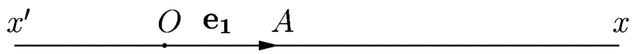
Έχουμε (Σχήμα 1.12):

$$\begin{aligned} \mathbf{PA} + \mathbf{PB} - 2\mathbf{PC} &= \mathbf{PA} + \mathbf{PA} + \mathbf{AB} - 2(\mathbf{PA} + \mathbf{AC}) \\ &= \mathbf{AB} - 2\mathbf{AC}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση. Σ'ό,τι ακολουθεί στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιούμε τον όρο διάνυσμα και για το εφαρμοστό και για το ελεύθερο διάνυσμα.

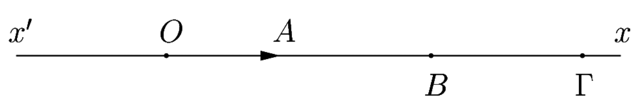
2. Άξονας και αλγεβρική τιμή διανύσματος

Θεωρούμε την ευθεία $x'x$ και ένα σταθερό σημείο O πάνω σε αυτήν. Ορίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{OA} = \mathbf{e_1}$ ως μοναδιαίο επί της ευθείας και τη φορά του διανύσματος **OA** ως θετική φορά πάνω στην ευθεία. Ό,τι προκύπτει είναι ένας **προσανατολισμένος άξονας** με αρχή το O. Επειδή το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{e_1}$ ορίζει την ευθεία $x'x$, δηλαδή το σταθερό σημείο O, την μονάδα μήκους καθώς και τη θετική φορά πάνω σε αυτήν, μπορούμε να συμβολίζουμε ένα προσανατολισμένο άξονα με το ζεύγος $(\mathrm{O}, \mathbf{e_1})$ (Σχήμα 1.13).



Σχήμα 1.13

Αν B σημείο του άξονα $x'x$, τότε υπάρχει αριθμός $x \in I\!R$ έτσι ώστε $\mathbf{OB} = x\mathbf{OA}$. Τον αριθμό x καλούμε **τετμημένη** του σημείου B ή **αλγεβρική τιμή** του διανύσματος **OB** και γράφουμε $\overline{OB} = x$. Σχήμα 1.14. Αν $\mathbf{u} = \mathbf{OB}$ και x η αλγεβρική τιμή του **OB**, τότε ο αριθμός x καλείται επίσης αλγεβρική τιμή του **u**.



Σχήμα 1.14

Αντιστρόφως, για κάθε $x \in I\!R$ υπάρχει ένα σημείο B του άξονα $x'x$ έτσι ώστε $\mathbf{OB} = x\mathbf{OA}$.

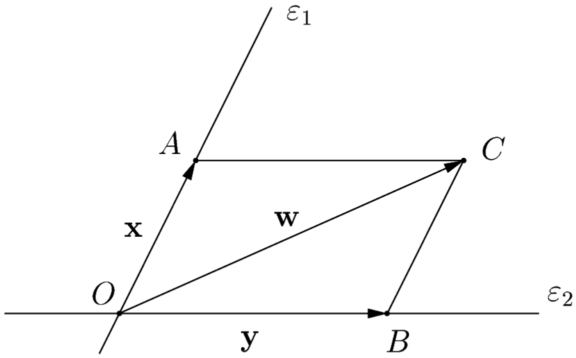
Υπάρχει επομένως μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στο σύνολο των σημείων του άξονα $x'x$ και του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Έστω **u** ένα ελεύθερο διάνυσμα παράλληλο του άξονα $x'x$ και **OB** αντιπρόσωπος αυτού πάνω στον άξονα $(O, \mathbf{e_1})$ (Σχήμα 1.14). Αν το **OB** έχει τετμημένη x, τότε τον αριθμό x καλούμε **τετμημένη** του **u**.

Γενικότερα αποδεικνύεται ότι αν B και Γ σημεία του $x'x$ με τετμημένες x_1 και x_2, αντίστοιχα, τότε το **ΒΓ** έχει τετμημένη $x_2 - x_1$.

3. Σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο

Έστω **x**, **y** δύο ελεύθερα μη παράλληλα διανύσματα και ε_1, ε_2 δύο συνεπίπεδες ευθείες τέτοιες ώστε $\mathbf{x} \| \varepsilon_1$ και $\mathbf{y} \| \varepsilon_2$. Ας θεωρήσουμε τους αντιπροσώπους αυτών **OA** και **OB** που ανήκουν στις ευθείες ε_1 και ε_2, αντίστοιχα (Σχήμα 1.15) και στη συνέχεια ας πάρουμε το άθροισμα των **x** και **y**.



Σχήμα 1.15

Το διάνυσμα $\mathbf{w} = \mathbf{OC}$, όπου OC διαγώνιος του παραλληλογράμμου $OACB$, αποτελεί το άθροισμα των **x** και **y**.

Αντίστροφα μπορούμε να πούμε ότι το διάνυσμα **w** αναλύεται σε δύο άλλα διανύσματα **x** και **y** των οποίων αποτελεί το άθροισμα.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι προσανατολισμένοι άξονες αρχής Ο και μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{e_1}$ και $\mathbf{e_2}$, αντίστοιχα, τότε μπορούμε να γράφουμε ότι:

$$\mathbf{w} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2},$$

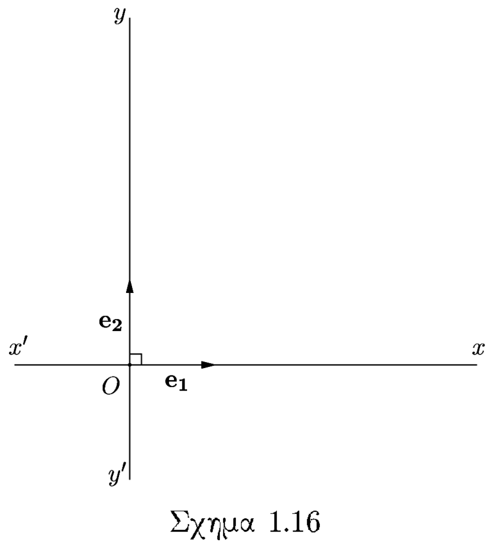
όπου x είναι η αλγεβρική τιμή του διανύσματος $\mathbf{x}$ ως προς τον άξονα $(O, \mathbf{e_1})$ και y η αλγεβρική τιμή του διανύσματος $\mathbf{y}$ ως προς τον άξονα $(O, \mathbf{e_2})$.

Έτσι για κάθε διάνυσμα του επιπέδου και κάθε σύστημα τεμνομένων ευθειών ορίζεται μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των διανυσμάτων $\mathbf{w}$ και του συνόλου διατεταγμένων ζευγών (x, y) πραγματικών αριθμών που είναι το Καρτεσιανό γινόμενο $I\!R \times I\!R \equiv I\!R^2$.

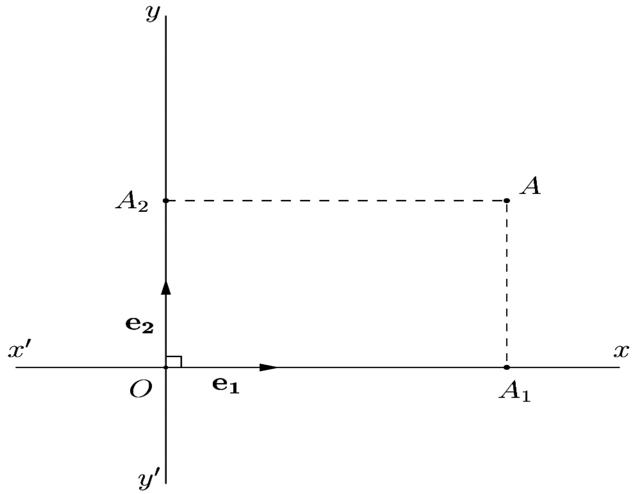
Αν οι άξονες $(O, \mathbf{e_1})$ και $(O, \mathbf{e_2})$ επιλεγούν να είναι κάθετοι μεταξύ τους, τότε λέμε ότι έχουμε ένα **ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων** ή απλά ένα **σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** και το συμβολίζουμε με Oxy (Σχήμα 1.16).

Ο άξονας $x'x$ καλείται **άξονας τετμημένων**, ενώ ο άξονας $y'y$ **άξονας τεταγμένων**. Το σημείο O καλείται **αρχή** του ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων (Σχήμα 1.16).

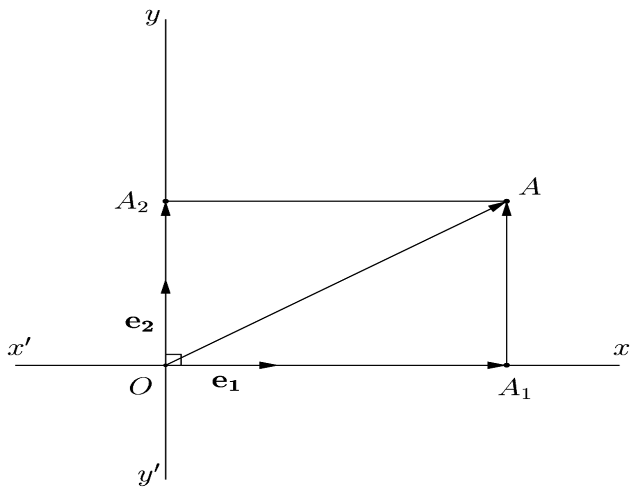
Έστω A ένα σημείο του επιπέδου. Από το σημείο αυτό φέρουμε δύο ευθείες παράλληλες στους άξονες $x'x$ και $y'y$ που τέμνουν τους άξονες $y'y$ και $x'x$ στα σημεία $\mathrm{A_2}$ και $\mathrm{A_1}$, αντιστοίχως. Έστω x και y είναι οι αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων $\mathbf{OA_1}$, $\mathbf{OA_2}$ των αξόνων $x'x$ και $y'y$, αντιστοίχως. Σχήμα 1.17. Καλούμε τον αριθμό x **τετμημένη** και τον αριθμό y **τεταγμένη** του σημείου Α.



Σχημα 1.16



Σχημα 1.17



Σχημα 1.18

Τα στοιχεία του διατεταγμένου ζεύγους (x, y) αποτελούν τις **ορθογώνιες συντεταγμένες** ή απλά τις **συντεταγμένες** του σημείου A του επιπέδου ως προς το σύστημα συντεταγμένων Oxy.

Στη συνέχεια όταν γράφουμε $A(x, y)$, όπου A σημείο του επιπέδου εννοούμε ότι οι ορθογώνιες συντεταγμένες του σημείου A είναι (x, y)

Παρατήρηση. Αν δοθεί ένα διατεταγμένο ζεύγος (x, y), τότε με τη βοήθεια του Oxy μπορούμε να αντιστοιχήσουμε ένα σημείο A του επιπέδου ως εξής: Στους άξονες $x'x$ και $y'y$ παίρνουμε σημεία A_1 και A_2 έτσι ώστε $\overline{OA_1} = x$ και $\overline{OA_2} = y$. Στη συνέχεια φέρουμε τις ευθείες τις παράλληλες προς τους άξονες $y'y$ και $x'x$ που διέρχονται από τα σημεία A_1 και A_2, αντίστοιχα. Σχήμα 1.17. Το σημείο τομής τους είναι το ζητούμενο σημείο Α.

Έστω σημείο A και σταθερό σημείο Ο. Καλούμε **ακτινικό διάνυσμα** ή **διάνυσμα θέσης** του σημείου Α το διάνυσμα **ΟΑ**. Σχήμα 1.18.

Αν Ο η αρχή του ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων Oxy και (x, y) οι συντεταγμένες του Α ως προς αυτό, τότε από το Σχήμα 1.18 έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{OA} &= \mathbf{OA_1} + \mathbf{A_1A} \\ &= \mathbf{OA_1} + \mathbf{OA_2} \\ &= x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2},\end{aligned}$$

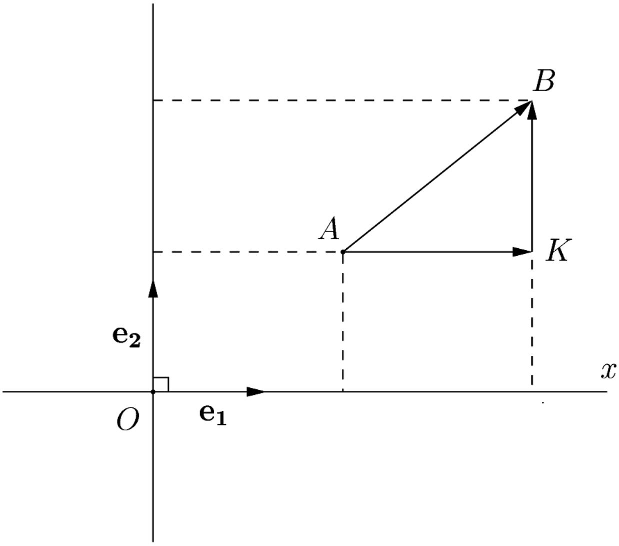
όπου $\mathbf{e_1}$ και $\mathbf{e_2}$ τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων Ox και Oy, αντίστοιχα.

Ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

(1) Το σημείο Α του επιπέδου έχει συντεταγμένες τους αριθμούς x και y τότε και μόνο τότε όταν $\mathbf{OA} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2}$.

(2) Αν $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, τότε $\mathbf{AB} = \mathbf{AK} + \mathbf{KB}$, $\mathbf{AK} \| x'x$ και $\mathbf{KB} \| y'y$. Επίσης το **ΑΚ** έχει τετμημένη $x_2 - x_1$ ως προς τον άξονα $(O, \mathbf{e_1})$ και το **ΚΒ** έχει τετμημένη $y_2 - y_1$ ως προς τον άξονα $(O, \mathbf{e_2})$. Οπότε

$$\mathbf{AB} = (x_2 - x_1)\mathbf{e_1} + (y_2 - y_1)\mathbf{e_2}.$$

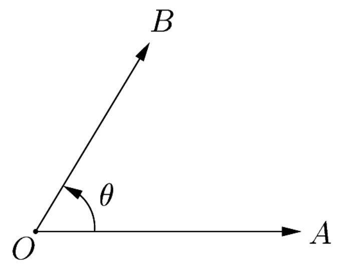


Σχημα 1.19

Έστω $\mathbf{u} = \mathbf{OA} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2}$. Τότε λέμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{u}$ έχει **συντεταγμένες** x και y και γράφουμε: $\mathbf{u} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2}$ ή $\mathbf{u} = (x, y)$.

Τώρα έστω $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ και $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$. Τότε ισχύουν τα εξής:
(3) $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ τότε και μόνο τότε όταν $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$.
(4) $\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$
(5) $\lambda\mathbf{u} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$
(6) $|\mathbf{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Έστω τα διανύσματα $\mathbf{u} = \mathbf{OA}$ και $\mathbf{v} = \mathbf{OB}$. **Γωνία** εκ του διανύσματος $\mathbf{u}$ προς το διάνυσμα $\mathbf{v}$ καλούμε τη γωνία θ που διαγράφει το $\mathbf{u}$ κινούμενο κατά τη θετική φορά (δηλαδή φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού) μέχρι να συμπέσει με το διάνυσμα $\mathbf{v}$. Σχήμα 1.20. Προφανώς $0 \leq \theta < 2\pi$.



Σχημα 1.20

Παραδείγματα.

(1) Έστω $\mathbf{u} = (1,3)$ και $\mathbf{v} = (-1,2)$. Τότε, έχουμε:

(i) $4\mathbf{u} = (4,12)$,
(ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (0,5)$,
(iii) $|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$,
(iv) $-2\mathbf{u} + \mathbf{v} = (-3,-4)$.

(2) Έστω $\mathbf{u} = (1,-5)$ και $\mathbf{v} = (x-1, y+2)$. Να βρεθούν τα $x, y \in I\!R$ έτσι ώστε $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Έχουμε: $1 = x - 1$ και $-5 = y + 2$. Οπότε $x = 2$ και $y = -7$.

(3) Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{u} = (-1,2)$, $\mathbf{v} = (3,4)$ και $\mathbf{w} = (-2,6)$. Να βρεθεί το διάνυσμα $\mathbf{y} = 2\mathbf{u} - 4\mathbf{v} + 5\mathbf{w}$ και το $|\mathbf{y}|$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{y} = 2\mathbf{u} - 4\mathbf{v} + 5\mathbf{w} &= (2\cdot(-1) - 4\cdot 3 + 5\cdot(-2), 2\cdot 2 - 4\cdot 4 + 5\cdot 6)\\ &= (-24, 18)\end{aligned}$$

και

$$|\mathbf{y}| = \sqrt{(-24)^2 + 18^2} = 30.$$

4. Πολικό σύστημα συντεταγμένων

Σ' ένα επίπεδο ορίζεται ένα **πολικό σύστημα συντεταγμένων**, όταν δίνονται:

α) ένα σταθερό σημείο O, το οποίο ονομάζεται **αρχή** του πολικού συστήματος συντεταγμένων,

β) μία ημιευθεία Ox, η οποία ονομάζεται **πολικός άξονας** του πολικού συστήματος συντεταγμένων,

γ) μία μονάδα μήκους και

δ) μία θετική φορά στροφής.

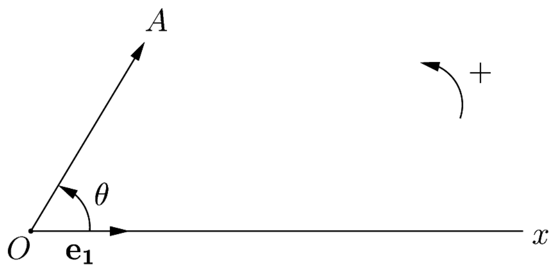
Έστω A τυχόν σημείο του επιπέδου. Τότε στο σημείο A, αντιστοιχούμε (Σχήμα 1.21):

(1) Τον αριθμό $r = |\mathbf{OA}| \geq 0$ ο οποίος καλείται **πολική ακτίνα** του σημείου A.

(2) Τη γωνία θ, $0 \leq \theta < 2\pi$ που προκύπτει αν στρέψουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{e_1}$ αντίθετα της κίνησης των δεικτών του ρολογιού μέχρι να συμπέσει με το διάνυσμα **OA**. Η γωνία θ καλείται **πολική γωνία** του A. Στο σημείο O θεωρούμε ότι αντιστοιχεί $r = 0$ και $\theta = 0$.

Τα στοιχεία του διατεταγμένου ζεύγους (r, θ) καλούνται **πολικές συντεταγμένες** του σημείου A.

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι σε κάθε ζεύγος (r, θ), όπου $r \geq 0$ και $0 \leq \theta < 2\pi$ αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα σημείο του επιπέδου.



Σχήμα 1.21

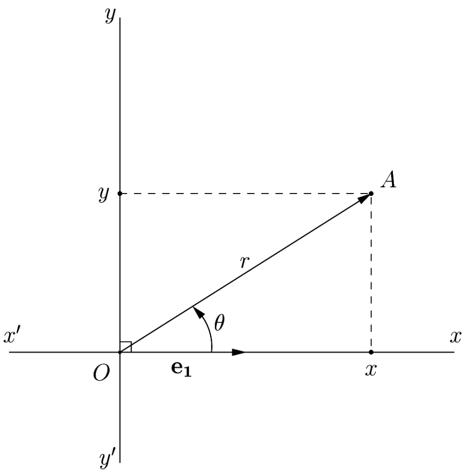
Παρατηρήσεις.

(1) Γνωρίζοντας τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) ενός σημείου A μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου A ως προς το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy που έχει άξονα τετμημένων τον

πολικό άξονα και άξονα τεταγμένων, άξονα κάθετο στο σημείο Ο του άξονα $x'x$. Σχήμα 1.22.

Έστω ότι το σημείο Α έχει συντεταγμένες (x, y) ως προς το Oxy και $(r, θ)$ στο πολικό σύστημα συντεταγμένων. Είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{cases} x = r\,\text{συν}θ \\ y = r\,\text{ημ}θ. \end{cases}$$



Σχήμα 1.22

(2) Αν δίνονται οι συντεταγμένες (x, y) ενός σημείου Α του επιπέδου, τότε για να βρούμε τις πολικές συντεταγμένες αυτού, στο πολικό σύστημα συντεταγμένων με πολικό άξονα τον $x'x$ και αρχή το σημείο Ο (Σχήμα 1.22) εφαρμόζουμε τους παρακάτω τύπους:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{εφ}θ = \frac{y}{x} \end{cases}.$$

Ο δεύτερος τύπος δίνει δύο γωνίες $θ_1$ και $θ_2$ (οι οποίες διαφέρουν κατά π). Επιλέγουμε την πολική γωνία αφού εντοπίσουμε από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες το τεταρτημόριο που βρίσκεται το σημείο Α.

Παραδείγματα.

(1) Δίνονται οι πολικές συντεταγμένες $(4, \frac{\pi}{3})$ ενός σημείου Α. Να βρεθούν οι αντίστοιχες συντεταγμένες αυτού.

Έχουμε:

$$\begin{cases} x = 4\text{συν}\frac{\pi}{3} \\ y = 4\text{ημ}\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

(2) Δίνονται οι συντεταγμένες $(1, 1)$ ενός σημείου Α. Να βρεθούν οι αντίστοιχες πολικές συντεταγμένες.

Έχουμε:

$$\begin{cases} r = \sqrt{1^2 + 1^2} \\ \text{εφ}\theta = \frac{1}{1} \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \text{εφ}\theta = 1 \end{cases}$$

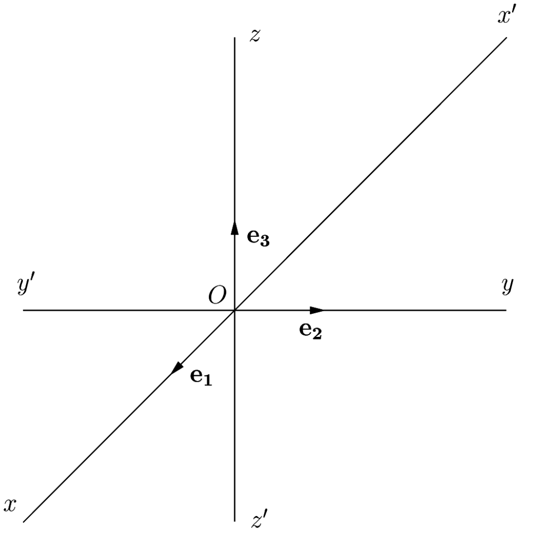
ή

$$\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

5. Ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο χώρο

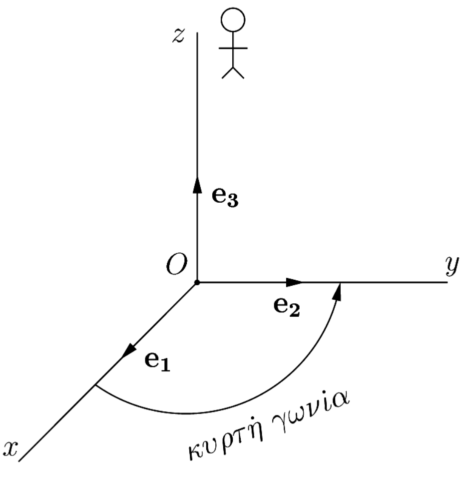
Έστω $x'x$, $y'y$ και $z'z$ τρείς άξονες κάθετοι μεταξύ τους με κοινή αρχή Ο και μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ και $\mathbf{e_3}$, αντίστοιχα (Σχήμα 1.23). Τότε λέμε ότι έχουμε ένα **ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο χώρο** ή απλά ένα **σύστημα συντεταγμένων στο χώρο** και το συμβολίζουμε με $Oxyz$.

Τα τρία επίπεδα που ορίζονται από τα ζεύγη των αξόνων $(x'x, y'y)$, $(y'y, z'z)$ και $(z'z, x'x)$ καλούνται **συντεταγμένα επίπεδα** και συμβολίζονται με Oxy, Oyz και Oxz, αντίστοιχα.

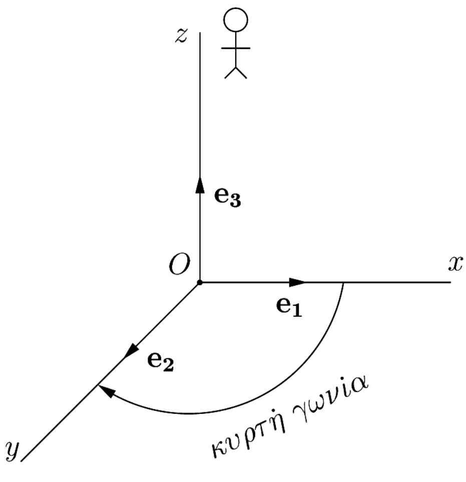


Σχήμα 1.23

Ένα σύστημα συντεταγμένων στο χώρο μπορεί να είναι **δεξιόστροφο** ή **αριστερόστροφο**. Αυτό καθορίζεται ως εξής:



Σχήμα 1.24



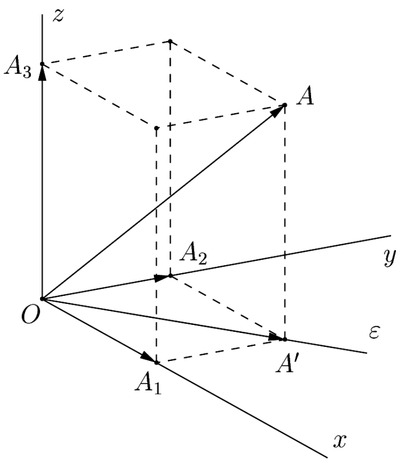
Σχήμα 1.25

Αν ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο τέλος του θετικού ημιάξονα Oz βλέπει ότι η κυρτή γωνία $\widehat{xOy}$ διαγράφεται θετικώς, δηλαδή αντίθετα της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, τότε το σύστημα καλείται **δεξιόστροφο.** Σχήμα 1.24.

Ένα σύστημα συντεταγμένων που δεν είναι δεξιόστροφο θα λέγεται **αριστερόστροφο.** Σχήμα 1.25.

Έστω A ένα σημείο του χώρου. Σχηματίζουμε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του Σχήματος 1.26 φέρνοντας από το σημείο A τρία επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα συντεταγμένων Oyz, Oxz και Oxy που τέμνουν τους άξονες $x'x$, $y'y$ και $z'z$ στα σημεία A_1, A_2 και A_3, αντίστοιχα. Το επίπεδο που ορίζουν το σημείο A και ο άξονας $z'z$ τέμνει το επίπεδο Oxy κατά μία ευθεία ε. Αναλύουμε το διάνυσμα $\mathbf{OA}$ σε δύο άλλα διανύσματα κατά μήκος της ευθείας ε και του άξονα $z'z$. Έτσι έχουμε:

$$\mathbf{OA} = \mathbf{OA'} + \mathbf{OA_3}\,.$$



Σχήμα 1.26

Ακολούθως αναλύουμε το διάνυσμα $\mathbf{OA'}$ κατα μήκος των αξόνων $x'x$ και $y'y$ και έχουμε:

$$\mathbf{OA'} = \mathbf{OA_1} + \mathbf{OA_2}\,.$$

Τελικά προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{OA} &= \mathbf{OA_1} + \mathbf{OA_2} + \mathbf{OA_3}\\ &= x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2} + z\mathbf{e_3}\,,\end{aligned}$$