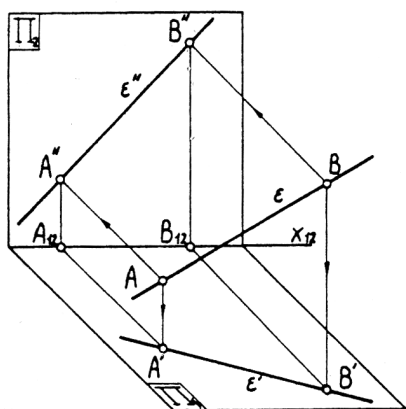


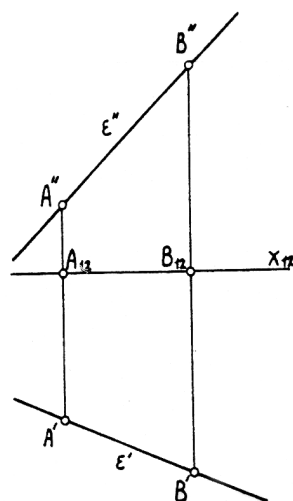
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

2.1. Παράσταση ευθείας

Έστω ϵ μία ευθεία του χώρου που δεν ανήκει σ' ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα x_{12} και έστω A και B δύο σημεία αυτής. Σχήμα 17.



Σχήμα 17



Σχήμα 18

Η ευθεία αυτή έχει:

α) Ως ορθή προβολή επί του επιπέδου Π_1 μία ευθεία την ϵ' , η οποία ορίζεται από τα σημεία A' και B' .

β) Ως ορθή προβολή επί του επιπέδου Π_2 μία ευθεία ϵ'' , η οποία ορίζεται από τα σημεία A'' και B'' .

Για τα ευθύγραμμα τμήματα AB , $A'B'$ και $A''B''$ έχουμε $A'B' \leq AB$ και $A''B'' \leq AB$.

Εάν τώρα στρέψουμε το επίπεδο Π_1 προς τα κάτω μέχρις ότου συμπέσει με το Π_2 , τότε στον πίνακα σχεδιάσεως έχουμε το Σχήμα 18.

Έστω ϵ' και ϵ'' δύο ευθείες του πίνακα σχεδιάσεως που δεν είναι κάθετες στον άξονα x_{12} . Τότε προφανώς υπάρχει μία ευθεία ϵ του χώρου που έχει ως πρώτη προβολή την ϵ' και ως δεύτερη την ϵ'' . Η κατασκευή της ευθείας ϵ φαίνεται στο Σχήμα 19.

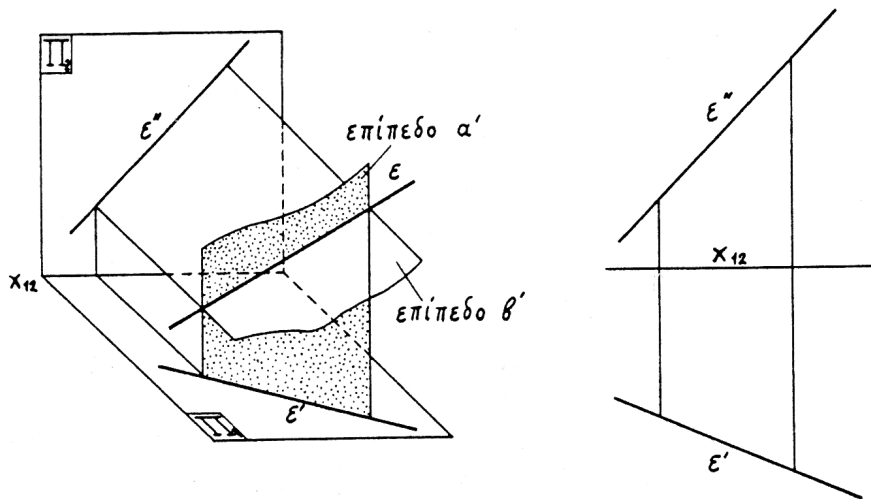
Σε περίπτωση που η ευθεία ϵ είναι παράλληλη σε κάποιο από τα επίπεδα Π_1 και Π_2 , λέμε ότι έχουμε *ιδιάζουσα* θέση της ευθείας ϵ στο χώρο.

Έστω τώρα ότι οι ευθείες ϵ' και ϵ'' συμπίπτουν και είναι κάθετες στον άξονα x_{12} , τότε υπάρχουν άπειρες ευθείες που έχουν ως πρώτη προβολή την ϵ' και ως δεύτερη την

ϵ'' . Οι ευθείες αυτές ανήκουν σ'ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα x_{12} στο κοινό σημείο τομής των ϵ' και ϵ'' με τον άξονα x_{12} .

Τέλος, εάν μία από τις ευθείες ϵ' και ϵ'' είναι κάθετη στον άξονα x_{12} χωρίς να συμπίπτει με την άλλη, τότε δεν υπάρχει ευθεία ϵ που να έχει προβολές τις ευθείες ϵ' και ϵ'' .

Σ'ότι ακολουθεί εάν μία ευθεία ϵ καθορίζεται μονοσήμαντα από τις προβολές της ϵ' και ϵ'' , τότε γράφουμε $\epsilon(\epsilon', \epsilon'')$.



Σχήμα 19

2.2. Σημείο και ευθεία

Έστω $A(A', A'')$ και $\epsilon(\epsilon', \epsilon'')$ ένα σημείο και μία ευθεία του χώρου. Επειδή η πρώτη και η δεύτερη προβολή της ευθείας ϵ είναι ο γεωμετρικός τόπος των πρώτων και των δεύτερων προβολών των σημείων της αντίστοιχα, έχουμε ότι: Εάν το σημείο A ανήκει στην ευθεία ϵ τότε οι προβολές A' και A'' ανήκουν στις προβολές ϵ' και ϵ'' της ευθείας ϵ . Αντιστρόφως, εάν οι προβολές A' και A'' του σημείου A ανήκουν στις ευθείες ϵ' και ϵ'' , αντίστοιχα, τότε το σημείο A ανήκει στην ευθεία ϵ .

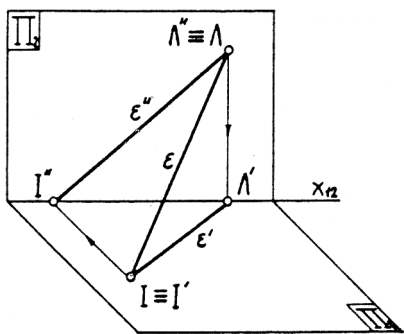
2.3. Ίχνη ευθείας

Τα σημεία τομής $I(I', I'')$ και $\Lambda(\Lambda', \Lambda'')$ μίας ευθείας $\epsilon(\epsilon', \epsilon'')$ του χώρου με τα επίπεδα προβολής Π_1 και Π_2 καλούνται *πρώτο* και *δεύτερο ίχνος* της ευθείας ϵ . Σχήμα 20.

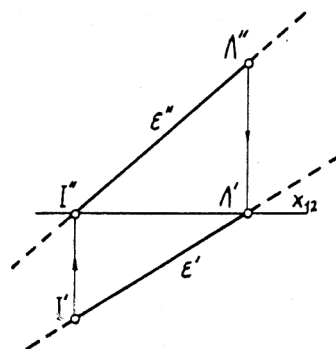
Όπως δείχνει το Σχήμα 20 η μετωπική προβολή Λ'' του ίχνους Λ συμπίπτει με το ίδιο το σημείο Λ , ενώ η οριζόντια προβολή Λ' βρίσκεται πάνω στον άξονα x_{12} . Η οριζόντια προβολή I' του I είναι το I , ενώ η μετωπική προβολή I'' του I βρίσκεται πάνω στον άξονα x_{12} . Εάν κατακλίσουμε το επίπεδο Π_1 επί του επιπέδου Π_2 έχουμε το Σχήμα 21.

Στο Σχήμα 21 παρατηρούμε ότι τα ίχνη I και Λ της ευθείας ε χωρίζουν αυτή σε τρία μέρη εκ των οποίων μόνο το $I\Lambda$ βρίσκεται στην περιοχή (I) και είναι ορατό. Τηρώντας τον κανόνα της Παραγράφου 1.5 στον πίνακα σχεδιάσεως τα τμήματα $I''\Lambda''$ και $I'\Lambda'$ είναι με συνεχή γραμμή ενώ τα υπόλοιπα με διακεκομμένη γραμμή.

Σ' ότι ακολουθεί θα προσπαθούμε εν γένει να τηρούμε τον κανόνα αυτό.



Σχήμα 20



Σχήμα 21

Για την εύρεση των ίχνών μιας ευθείας ε μπορούμε να διατυπώσουμε τον παρακάτω κανόνα:

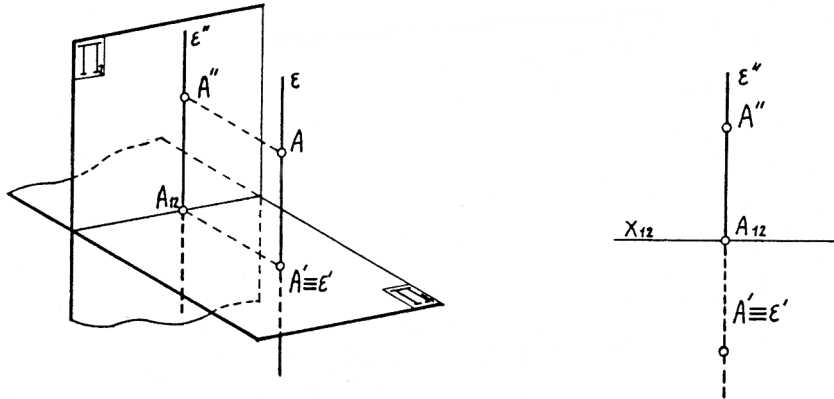
α) Το δεύτερο ίχνος της ευθείας ε βρίσκεται αν προεκτείνουμε την οριζόντια προβολή του δοσμένου τμήματος της ευθείας ε μέχρι να συναντήσει τον άξονα x_{12} . Εκεί γράφουμε το σημείο Λ' που είναι η οριζόντια προβολή του δευτέρου ίχνους Λ . Στη συνέχεια από το Λ' φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα x_{12} μέχρι να συναντήσει τη προέκταση της μετωπικής προβολής του δοσμένου τμήματος της ευθείας ε . Εκεί βρίσκεται η μετωπική προβολή Λ'' του ίχνους, αλλά και το ίδιο το ίχνος Λ .

β) Το πρώτο ίχνος της ευθείας ε βρίσκεται αν προεκτείνουμε τη μετωπική προβολή του δοσμένου τμήματος της ευθείας ε μέχρι να συναντήσει τον άξονα x_{12} . Εκεί γράφουμε το σημείο I'' που είναι η μετωπική προβολή του πρώτου ίχνους I . Στη συνέχεια από το I'' φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα x_{12} μέχρι να συναντήσει τη προέκταση της οριζόντιας προβολής του δοσμένου τμήματος της ευθείας ε . Εκεί βρίσκεται η οριζόντια προβολή I' του ίχνους, αλλά και το ίδιο το ίχνος I .

Πρέπει να μην ξεχνάμε ότι η ευθεία που είναι παράλληλη σε κάποιο από τα επίπεδα Π_1 και Π_2 δεν δίνει ίχνος σ' αυτό το επίπεδο μια και με αυτό δεν τέμνεται.

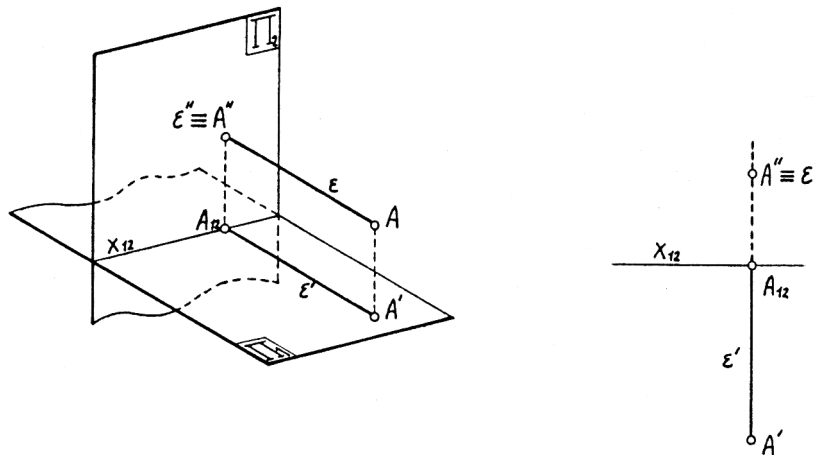
2.4. Θέσεις ευθειών ως προς τα επίπεδα προβολής

α) *Κατακόρυφη ευθεία* καλείται η ευθεία ϵ του χώρου που είναι κάθετη στο επίπεδο Π_1 . Η πρώτη προβολή μιας κατακόρυφης ευθείας ϵ είναι ένα σημείο που συμπίπτει με το πρώτο ίχνος της, η δε δεύτερη προβολή είναι μία ευθεία κάθετη στον άξονα x_{12} . Σχήμα 22.



Σχήμα 22

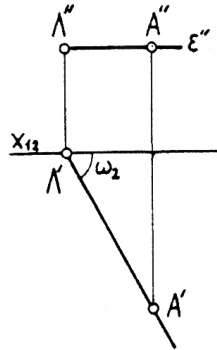
β) *Πρόσθια ευθεία* καλείται η ευθεία που είναι κάθετη στο επίπεδο προβολής Π_2 . Η δεύτερη προβολή μιας πρόσθιας ευθείας ϵ είναι ένα σημείο που συμπίπτει με το δεύτερο ίχνος της, η δε πρώτη προβολή είναι μία ευθεία ϵ' κάθετη στον άξονα x_{12} . Σχήμα 23.



Σχήμα 23

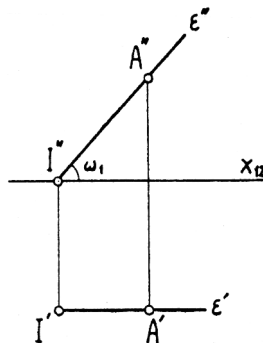
γ) *Οριζόντια ευθεία* καλείται η ευθεία που είναι παράλληλη προς το επίπεδο προβολής Π_1 . Η δεύτερη προβολή μιας οριζόντιας ευθείας ϵ είναι παράλληλη προς τον

άξονα x_{12} . Η δε πρώτη προβολή σχηματίζει με τον άξονα x_{12} γωνία ω_2 ίση με τη γωνία κλίσεως της ε με το επίπεδο Π_2 . Σχήμα 24.



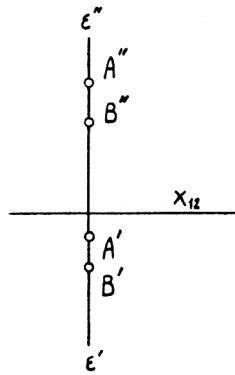
Σχήμα 24

δ) *Μετωπική ευθεία* καλείται η ευθεία που είναι παράλληλη προς το επίπεδο προβολής Π_2 . Η πρώτη προβολή ε' μιας μετωπικής ευθείας ε είναι παράλληλη προς τον άξονα x_{12} . Η δε δεύτερη προβολή ε'' σχηματίζει με τον άξονα x_{12} γωνία ω_1 ίση με τη γωνία κλίσεως της ε με το επίπεδο Π_1 . Σχήμα 25.



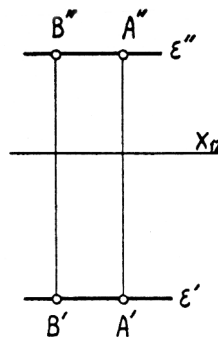
Σχήμα 25

ε) *Εγκάρσια ευθεία* καλείται η ευθεία του χώρου που βρίσκεται πάνω σε επίπεδο κάθετο στον άξονα x_{12} , χωρίς να είναι κάθετη επί του Π_1 ή επί του Π_2 . Οι προβολές μιας εγκάρσιας ευθείας ε είναι κάθετες στον άξονα x_{12} στο ίδιο σημείο. Σχήμα 26.



Σχήμα 26

ζ) Ευθεία παράλληλη στον άξονα x_{12} καλείται η ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x_{12} . Οι προβολές μιας τέτοιας ευθείας ϵ είναι παράλληλες στον άξονα x_{12} .
Σχήμα 27.

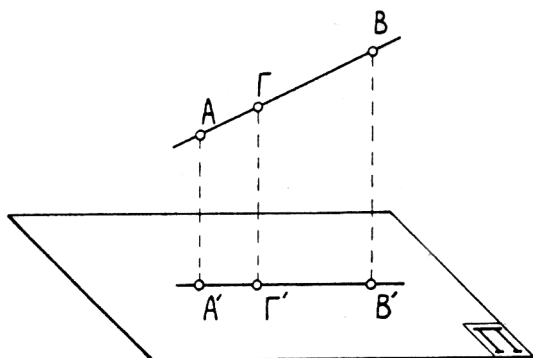


Σχήμα 27

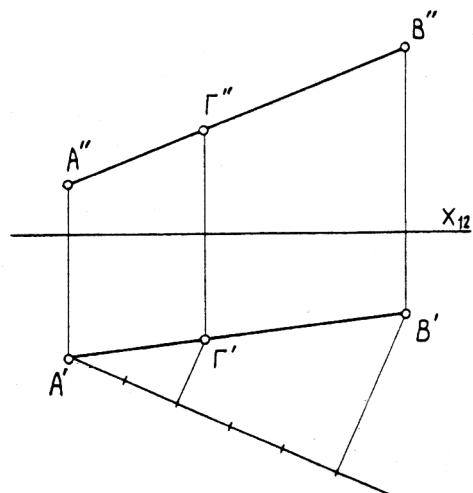
2.5. Διαίρεση τμήματος ευθείας σε μέρη ανάλογα με δοσμένη σχέση

Για να διαιρέσουμε ένα τμήμα ευθείας που έχει δοθεί στον πίνακα σχεδιάσεως σε μέρη ανάλογα αρκεί να διαιρέσουμε τις προβολές του τμήματος αυτού της ευθείας κατά την δοσμένη σχέση. Πράγματι όπως βλέπουμε στο Σχήμα 28 που έχουμε ορθογώνια

προβολή της ευθείας AB στο επίπεδο Π , λόγω παραλληλίας των ευθειών σύνδεσης ισχύει ότι $\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{A'\Gamma'}{\Gamma'B'}$.



Σχήμα 28



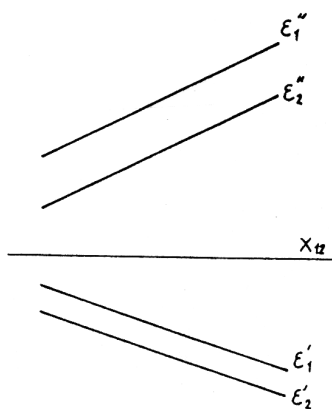
Σχήμα 29

Συνεπώς η σχέση τμημάτων μιάς ευθείας είναι ίση με την σχέση των αντίστοιχων προβολών τους. Το Σχήμα 29 δείχνει τη τεχνική της διαίρεσης ευθείας, δοσμένης μέσω των προβολών της, κατά δοσμένη σχέση. Στη συγκεκριμένη περίπτωση του σχήματος η AB διαιρείται σε τμήματα με σχέση των μηκών τους 2 : 3.

2.6. Παράλληλες ευθείες

Για να είναι δύο μη εγκάρσιες ευθείες παράλληλες πρέπει και αρκεί οι προβολές τους να είναι παράλληλες.

Πράγματι, έστω $e_1(e'_1, e''_1)$ και $e_2(e'_2, e''_2)$ δύο παράλληλες ευθείες. Εάν οι ευθείες αυτές δεν είναι εγκάρσιες, τότε τα επίπεδα που προβάλλουν αυτές επί του οριζοντίου και του κατακορύφου επιπέδου προβολής θα είναι παράλληλα και επομένως οι προβολές των ευθειών αυτών θα είναι παράλληλες, δηλαδή $e'_1 \parallel e'_2$ και $e''_1 \parallel e''_2$.



Σχήμα 30

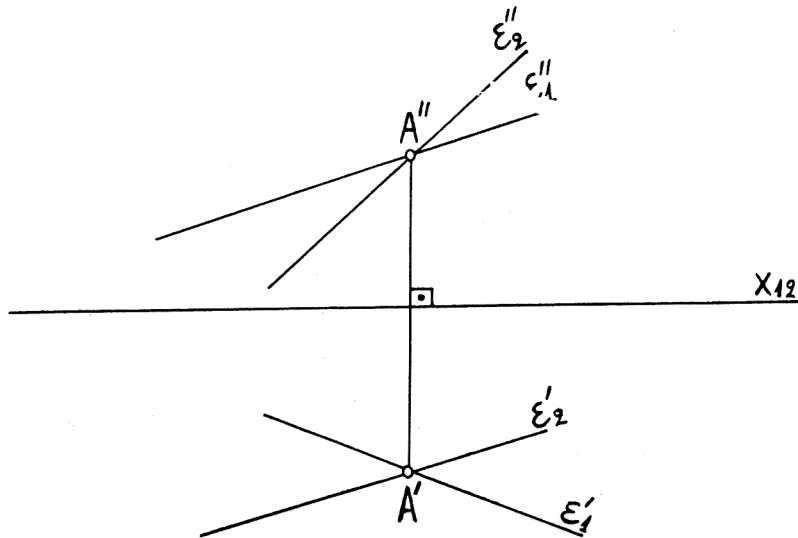
Έστω ότι οι προβολές των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Εάν οι ευθείες ε_1 και ε_2 δεν είναι παράλληλες, τότε απο ένα σημείο $A(A', A'')$ της ευθείας ε_1 φέρουμε ευθεία ε παράλληλη στην ε_2 . Οι προβολές της ευθείας ε , οι ε' και ε'' διερχόμενες απο τα σημεία A' και A'' , αντίστοιχα, οφείλουν να είναι παράλληλες προς τις ε'_2 και ε''_2 . Συνεπώς θα συμπίπτουν με τις ε'_1 και ε''_1 . Οπότε $\varepsilon \equiv \varepsilon_1$ και επιπλέον η ε_1 είναι παράλληλη της ε_2 .

2.7. Τεμνόμενες ευθείες

Για να τέμνονται δύο μη εγκάρσιες ευθείες πρέπει και αρκεί τα σημεία τομής των προβολών τους να βρίσκονται πάνω σε ευθεία κάθετη στον άξονα x_{12} .

Έστω $\varepsilon_1(\varepsilon'_1, \varepsilon''_1)$ και $\varepsilon_2(\varepsilon'_2, \varepsilon''_2)$ δύο μη εγκάρσιες ευθείες που τέμνονται στο σημείο $A(A', A'')$.

Επειδή το σημείο $A \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$, έχουμε ότι το $A' \in \varepsilon'_1 \cap \varepsilon'_2$ και $A'' \in \varepsilon''_1 \cap \varepsilon''_2$. Ομως τα σημεία A' και A'' είναι προβολές του ίδιου σημείου του χώρου, οπότε βρίσκονται πάνω σε ευθεία κάθετη στον άξονα x_{12} . Σχήμα 31.



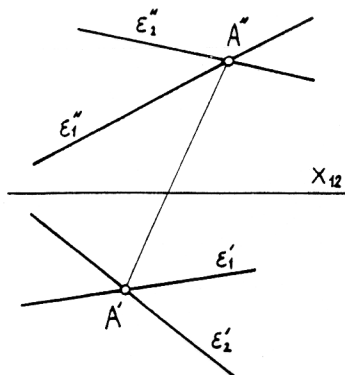
Σχήμα 31

Αντιστρόφως, αφού τα σημεία A' και A'' βρίσκονται σε ευθεία κάθετη στον άξονα x_{12} έπεται ότι είναι προβολές του αυτού σημείου A . Αλλά $A' \in \varepsilon'_1 \cap \varepsilon'_2$ και $A'' \in \varepsilon''_1 \cap \varepsilon''_2$. Οπότε $A \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$, δηλαδή οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται. Σχήμα 31.

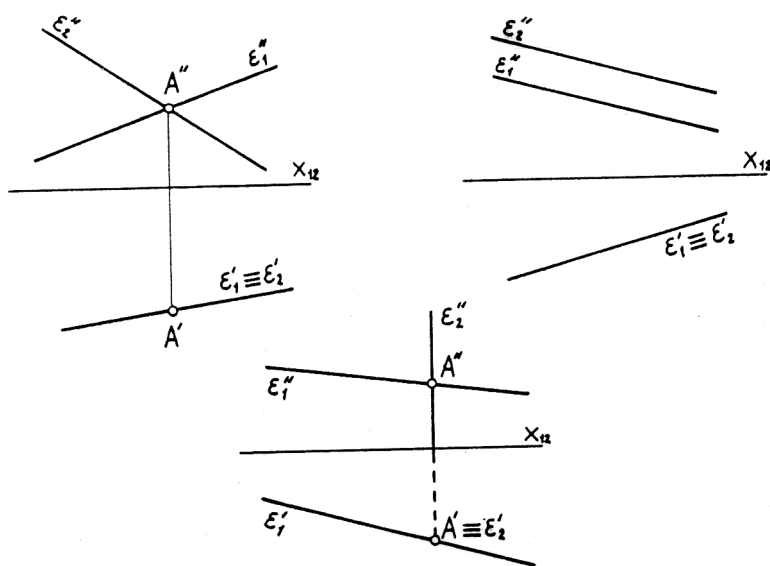
Εάν τα σημεία τομής των προβολών δύο μη εγκάρσιων ευθειών δεν βρίσκονται πάνω σε ευθεία κάθετη στον άξονα x_{12} , τότε οι ευθείες αυτές θα είναι ασύμβατες. Σχήμα 32.

Τέλος στη περίπτωση κατά την οποία οι οριζόντιες ή οι κατακόρυφες προβολές δύο ευθειών ε_1 και ε_2 συμπίπτουν, οι ευθείες αυτές θα βρίσκονται επί του αυτού επιπέδου, καθέτου επί του οριζοντίου ή του κατακορύφου επιπέδου προβολής. Συνεπώς θα

τέμνονται ή θα είναι παράλληλες. Σχήμα 33.



Σχήμα 32



Σχήμα 33

2.8. Γωνία κλίσεως

Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι γωνία μιας ευθείας μ' ένα επίπεδο καλείται η οξεία γωνία που σχηματίζει η ευθεία με την προβολή της στο επίπεδο. Τη γωνία ευθείας με επίπεδο την ονομάζουμε *γωνία κλίσεως της ευθείας προς το επίπεδο*.

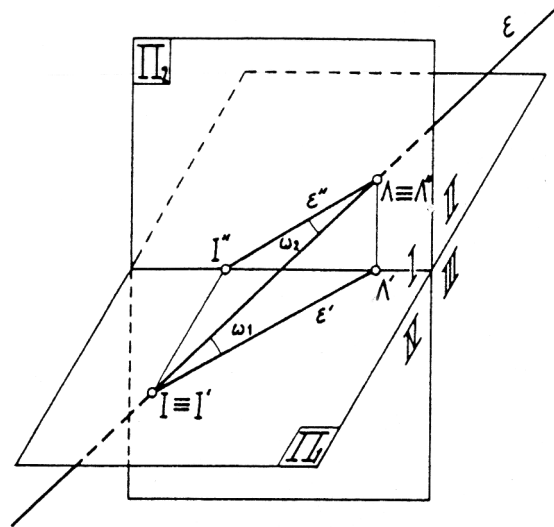
Έστω $\epsilon(\epsilon', \epsilon'')$ η δοθείσα ευθεία και ω_1, ω_2 οι γωνίες κλίσεως αυτής προς τα επίπεδα προβολής Π_1 και Π_2 . Εάν $I(I', I'')$ και $\Lambda(\Lambda', \Lambda'')$ τα ίχνη αυτής, τότε η γωνία κλίσεως αυτής ω_1 είναι η οξεία γωνία που σχηματίζουν η $I\Lambda$ και $I'\Lambda'$ πρώτη προβολή της ϵ , δηλαδή η οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου $I\Lambda'\Lambda$. Σχήμα 34.

Η γωνία κλίσεως ω_2 είναι η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι $I\Lambda$ και $I''\Lambda''$ δεύτερη προβολή της ϵ , δηλαδή η οξεία γωνία του τριγώνου $I''\Lambda''\Lambda$. Σχήμα 34.

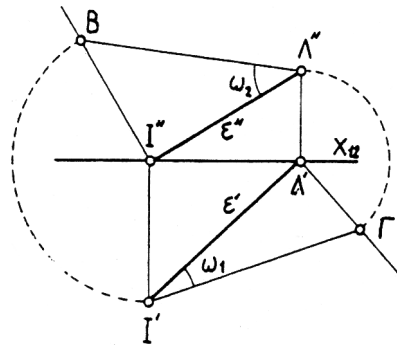
Παραστατικά τις γωνίες ω_1 και ω_2 τις βρίσκουμε ως εξής:

α) Γράφουμε το κύκλο $(\Lambda', R = \Lambda'\Lambda'')$ που τέμνει τη κάθετο επί της $I'\Lambda'$ στο Λ' στο σημείο Γ . Σχήμα 35. Φέρουμε στη συνέχεια την $I'\Gamma$ και έχουμε $\omega_1 = \widehat{\Lambda'I'\Gamma}$.

β) Γράφουμε το κύκλο $(I'', R = I'I'')$ που τέμνει τη κάθετο επί της $I''\Lambda''$ στο I'' στο σημείο B . Σχήμα 35. Φέρουμε στη συνέχεια την $B\Lambda''$ και έχουμε $\omega_2 = \widehat{B\Lambda''I''}$.



Σχήμα 34



Σχήμα 35

2.9. Σχέση ευθειών με τα επίπεδα συμμετρίας και συμπτώσεως

Έστω $A(A', A'')$ το σημείο τομής της ευθείας $\epsilon(\epsilon', \epsilon'')$ με το επίπεδο συμμετρίας Π_{13} . Τότε τα σημεία A', A'' είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x_{12} . Το σημείο A'' ορίζεται ως η τομή της ϵ'' με τη συμμετρική της ευθείας ϵ' ως προς τον άξονα x_{12} . Το σημείο A' ορίζεται ως η τομή της ϵ' με τη κάθετο στον άξονα x_{12} που περνάει από το A'' . Από τη κατασκευή είναι προφανές ότι τα σημεία A', A'' είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x_{12} . Σχήμα 36.

Έστω $B(B', B'')$ το σημείο τομής της ευθείας $\epsilon(\epsilon', \epsilon'')$ με το επίπεδο Π_{24} . Τότε $B' \equiv B'' \equiv B$. Προφανώς το σημείο αυτό είναι το σημείο τομής των ϵ' και ϵ'' . Σχήμα